



מבחן אמצע בקורס לוגיקה ותכנות לוגי.

יום ו כג איר התשסז, 11-5-2007 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- המבחן הוא ללא חומר עזר וללא מחשבוני, למעט דפי הנוסחאות המצורפים.
- המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק. התשובות שתבדקנה הן אלו שתתקבלנה על ידי הקפת האפשרות הנכונה בגוף השאלון.
- המבחן כולל 4 שאלות. שלש השאלות הראשונות הן בנות 26 סעיפים סה"כ. כל סעיף הוא בעל ערך של 3, ולכן משקל שאלות 1-3 הוא 78 נקודות. שאלה 4 היא שאלת כתיבת קוד, משקלה 25 נקודות, וגם עליה יש לענות בגוף השאלון.

**בהצלחה.**

# שאלה 1

נביט במודל הבא:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $i(a), i(e), i(f), i(g), R(a, b), R(a, c), R(a, d), R(b, e), R(b, f), R(b, g), R(c, e), R(c, f), R(c, g), R(e, h), R(f, h), R(g, h)$ ,

על כל אחד מההצהרות הבאות סמן אם היא נכונה או לא במודל.

1.  $\forall X[\exists Y(R(X, Y))]$ .

נכון      לא נכון

2.  $\exists X[\forall Y(R(X, Y))]$ .

נכון      לא נכון

3.  $\forall X[i(X) \rightarrow \{(\exists Y \overline{i(Y)}) \wedge (R(X, Y))\}]$ .

נכון      לא נכון

4.  $\forall X \forall Y[(i(X) \wedge \overline{i(Y)}) \rightarrow R(X, Y)]$ .

נכון      לא נכון

נסמן את הסגור הטרנזיטיבי של R ב-S. האם הטענות הבאות נכונות?

5.  $\forall X \forall Y[S(X, Y)]$ .

נכון      לא נכון

6.  $\forall X \forall Y[S(X, Y) \vee S(Y, X)]$ .

נכון      לא נכון

נסמן את הסגור הסימטרי של S ב-T. האם הטענה הבאה נכונה?

7.  $\forall X \forall Y[S(X, Y) \rightarrow T(X, Y)]$ .

נכון      לא נכון

$$8. \forall X \forall Y [\{S(X, Y) \wedge \overline{T(X, Y)}\} \rightarrow [i(X) \wedge \overline{i(Y)}]].$$

לא נכון

נכון

$$9. \forall X \forall Y [\{T(X, Y) \wedge \overline{S(X, Y)}\} \rightarrow [i(X) \wedge \overline{i(Y)}]].$$

לא נכון

נכון

## שאלה 2

נביט ברשימת התכונות הבאה:

$$1. \forall X [S(X, X)].$$

$$2. \forall X \forall Y [\{S(X, Y) \wedge S(Y, X)\} \rightarrow (X = Y)].$$

$$3. \forall X \forall Y \forall Z [\{S(X, Y) \wedge S(Y, Z)\} \rightarrow (S(X, Z))].$$

א. מצא לרשימת תכונות זו מודל בין אבר אחד.

ב. מצא לרשימת תכונות זו מודל בן שני אברים.

ג. האם קיים לרשימת תכונות זו מודל בן שני אברים שאיננו איזומורפי למודל שמצאת בסעיף ב?.

ד. מצא לרשימת תכונות זו שני מודלים בני שלשה אברים שאינם איזומורפיים זה לזה.

ה. כמה מודלים בני שלשה אברים שאינם איזומורפיים זה לזה יש לרשימת תכונות זו.

### שאלה 3

נביט בקוד הבא:

```
k(a,b) .%1
k(a,c) .%2
k(b,d) .%3
k(b,e) .%4
k(c,f) .%5
k(c,g) .%6
r(X,Y) :-k(X,Y) .%7
r(X,Y) :-k(X,Z) , r(Z,Y) .%8
```

ונתונה השאילתא

$r(a, X)$

עקוב במחברתך אחר מהלך התכנית. באם התכנית נעצרת ומדפיסה תשובה, הנח כי תקתקת את הסימן ; וכי התכנית ממשיכה לרוץ. באם התכנית הסתיימה ועדין שואלים אודות התנועה הבאה, כתוב כי אין תנועה.

ב-12 הסעיפים הראשונים כתוב עבור כל תנועה את השאילתא המתאימה ומול איזו שורה היא עצרה. אם נוצר פלט כלפי המשתמש כתוב אותו יחד עם התנועה בה נוצר.

א. תנועה ראשונה.

ב. תנועה שנייה.

ג. תנועה שלישית.

ד. תנועה רביעית.

ה. תנועה חמישית.

ו. תנועה שישית.

ז. תנועה שביעית.

ח. תנועה שמינית.

ט. תנועה תשיעית.

י. תנועה עשירית.

יא. תנועה אחת עשר.

יב. תנועה שנים עשר.

#### שאלה 4

כתב (בשאלון) קוד פרולוג אשר מקבל כנתון וקטור משורשר של נתונים, ומחזיר כפלט את הנתון האחרון. אם מתקתקים ; הקוד מחזיר No.

דוגמא לשמוש הקוד:

`mevukash([1,2,3,4,5,6,7],X).`

`X=7. ;`

`No.`

תשובות לשאלות.

תשובה 1

א. לא, למשל  $X=h$  מקים שאין אבר  $Y$  כך ש- $R(h,Y)$  נכון.

ב. לא, הטענה היא שקיים אבר  $X$  אשר מתיחס עם היחס  $R$  לכל אבר אחר (כלומר לכל שאר שבעת האברים), אבל ברור שאין כזה אבר.

ג. התשובה היא כן, יש לבדק עבור כל  $X$ , כלומר שמונה  $X$ -ים. יש ארבעה  $X$ -ים עבורם  $i(X)$  איננו נכון. עבור  $X$ -ים אלו, (כלומר  $X=b,c,d,h$ ) הגרירה נכונה באופן אוטומטי, ולכן צריך לבדק רק את  $X=a,e,f,g$  ועבור כל אחד יש למצוא  $Y$  מתאים (מותר ל- $Y$  להשתנות עם  $X$ ), ואכן כפי שנראה נקבל עבור  $X=a$  את  $Y=b$  כך שהטענה נכונה, ועבור  $X=e,f,g$  הבחירה  $Y=h$  תתן טענה נכונה.

ד. לא, למשל נביט על  $X=a, Y=h$  אז  $i(X)$  נכון,  $i(Y)$  לא נכון ולכן, אם ד. היה נכון, אז היה צריך להתקיים  $R(a,h)$  שאיננו נכון.

ה. לא, למשל נביט על  $X=h, Y=a$  אז אפילו בסגור הטרנזיטיבי של  $R$  לא מתקיים  $S(h,a)$

ו. לא, למשל עבור  $X=b, Y=c$  גם  $S(b,c)$  וגם  $S(c,b)$  לא נכונים.

ז. כן באופן מידי, כי אם  $T$  הוא סגור (איזשהוא) של  $S$ , אז הוא מכיל את כל הזוגות שיש ב- $S$ .

ח. כן באופן מידי, כי כפי שראינו ב-ח אם  $S$  נכון אז  $T$  נכון, ולכן החתוך של  $S$  ושל השלילה של  $T$  לא נכון, ולכן הגרירה תמיד נכונה.

ט. לא למשל עבור  $X=b, Y=c$   $S$  לא נכון ו- $T$  נכון, אבל  $i(b), i(c)$  שניהם לא נכונים.

תשובה 2

א. מודל בן אבר אחד:  $U=\{a\}, S(a,a)$ .

ב. מודל בן שני איברים  $U=\{a,b\}, S(a,a), S(b,b)$ .

ג. מודל אחר בן שני איברים:  $U=\{a,b\}, S(a,a), S(b,b), S(a,b)$ .

ד. מודלים בני שלשה איברים:  $U=\{a,b,c\}, S(a,a), S(b,b), S(c,c)$ .  
 $U=\{a,b,c\}, S(a,a), S(b,b), S(c,c), S(a,b)$

ה. בנוסף למודלים הקודמים יתכנו עוד מודלים:

$U=\{a,b,c\}, S(a,a), S(b,b), S(c,c), S(a,b), S(b,c), S(a,c)$

$U=\{a,b,c\}, S(a,a), S(b,b), S(c,c), S(a,b), S(a,c)$

$U=\{a,b,c\}, S(a,a), S(b,b), S(c,c), S(a,c), S(b,c)$

אלו כל המודלים עד כדי איזומורפיזם.

תשובה 3

תנועה ראשונה

$r(a, X)$

עוצרת בשורה 7.

תנועה שניה

$k(a, X^2)$

עוצרת בשורה 1, ומתבצעת טעינה  $X^2=b$ .

מתבצעת הדפסה כלפי המשתמש  $X=b$ . מתבצע תקתוק ;

תנועה שלישית: השאילתא  $k(a, X^2)$  יורדת לשורה שניה. מתבצעת טעינה  $X^2=c$ .

מתבצעת הדפסה כלפי המשתמש  $X=c$ . מתבצע תקתוק ;

תנועה רביעית: השאילתא  $k(a, X^2)$  סורקת את הטכסט ולא מוצאת התאמה ולכן נסגרת. השאילתא  $r(a, X)$  יורדת לשורה 8.

תנועה חמישית: השאילתא  $k(a, Z^5)$  עוצרת בשורה 1 ומתבצעת טעינה  $Z^5=b$ .

תנועה שישית:: השאילתא  $r(b, Y^6)$  עוצרת בשורה 7

תנועה שביעית:: השאילתא  $k(b, Y^6)$  עוצרת בשורה 3 ומתבצעת טעינה  $Y^6=d$ . מתבצעת הדפסה  $Y=d$ , מתבצע תקתוק ;

תנועה שמינית: השאילתא  $k(b, Y^6)$  עוצרת בשורה 4 ומתבצעת טעינה  $Y^6=e$ . מתבצעת הדפסה  $Y=e$ , מתבצע תקתוק ;

השאילתא  $k(b, Y^6)$  סורקת את הטכסט לא מוצאת הצלחה, ונסגרת. השאילתא  $r(b, Y^6)$  עוצרת בשורה 8.

תנועה תשיעית: השאילתא  $k(b, Z^9)$  עוצרת בשורה 3. מתבצעת טעינה  $Z^9=d$ .

תנועה עשירית: השאילתא  $r(d, Z^{10})$  עוצרת בשורה 7.

תנועה אחת עשר: השאילתא  $k(d, Y^{11})$  לא מצליחה ונסגרת, השאילתא  $r(d, Z^{10})$  יורדת לשורה 8.

תנועה 12: השאילתא  $k(d, Z^{12})$  לא מצליחה ונסגרת, השאילתא  $k(b, Z^9)$  יורדת לשורה 4, מתבצעת טעינה  $Z^9=e$ .

תשובה 4

`mevukash([X],X).%1`

`mevukash([X|Y],Z):- mevukash(Y,Z).%2`

רשימת חוקי לוגיקה

$$1 \vee p \equiv 1, 1 \wedge p \equiv p, 0 \vee p \equiv p, 0 \wedge p \equiv 0 \quad \underline{\text{חוקי 0,1 (1-4)}}$$

$$p \vee \bar{p} \equiv 1, p \wedge \bar{p} \equiv 0, \neg(\bar{p}) \equiv p \quad \underline{\text{חוקי משלים (5-7)}}$$

$$\underline{0} \equiv 1, \underline{1} \equiv 0, \underline{p \vee q} \equiv \underline{p \wedge q} \quad \underline{\text{חוקי דה-מורגן (8-11)}}$$

$$p \vee p \equiv p, p \wedge p \equiv p \quad \underline{\text{חוקי אידימפוטנטיות (12-13)}}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \underline{\text{חוקי פלוג (14-15)}}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad \underline{\text{חוקי בליעה (16-17)}}$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad \underline{\text{חוקי קבוץ (18-19)}}$$

$$p \vee q \equiv q \vee p, p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \underline{\text{חוקי חלוף (20-21)}}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge p \rightarrow q \quad \underline{\text{(22) Modus ponens}}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge q \rightarrow p \quad \underline{\text{(23) Modus tolens}}$$

$$[p \rightarrow q] \equiv [q \rightarrow p] \quad \underline{\text{(24) Contrapositia}}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \quad \underline{\text{(25) Transitivity}}$$

$$(p \wedge q) \rightarrow p \quad (p \wedge q) \rightarrow q \quad \underline{\text{(26) פרוט}}$$

$$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow q \quad \underline{\text{cut(27)}}$$

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \underline{\text{exportatia(28)}}$$



$$(p \rightarrow q) \equiv p \vee \neg q \quad \text{(29) גרירה}$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \quad \text{(30) שקילות}$$

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)] \rightarrow (q \vee r) \quad \text{(31) רזולוציה}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)] \quad \text{(32)}$$

$$p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q) \quad \text{(33) nand}$$

$$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q) \quad \text{(34) nor}$$

$$p \oplus q \equiv [(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)] \equiv [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \quad \text{(35) xor}$$

$$R(a) \vdash \exists x R(x) \quad \text{(36) EG}$$

$$\exists x R(x) \vdash R(a) \quad \text{(37) EP(x/a) בתנאי ש-a שם עצם חדש בשפה}$$

$$R(x) \vdash \forall x R(x) \quad \text{(38) UG בתנאי ש-כל ההופעות של x ב-R חפשיות.}$$

$\forall x R(x) \vdash R(t) \quad \text{(39) US(x/t)}$  באחת משתי האפשרויות הבאות:  
1. t הוא קבוע כלשהו בשפה. 2. t הוא משתנה שהצבתו איננה מקלקלת הופעות חפשיות ב-R של אף משתנה.

$$\forall x (R(x)) \equiv \exists x (R(x)) \quad \text{(40) DM}$$

$$\exists x (R(x)) \equiv \forall x (R(x)) \quad \text{(41) DM}$$

$$[a \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow [(a \rightarrow b) \rightarrow c] \quad \text{(42)}$$