הקורס לוגיקה ותכנות לוגי

מורה: גיורא דולה. מכללת נתניה סמסטר אביב התשס"ב

הקורס מרכב משני חלקים עיקריים: חזרה והעמקה של

לוגיקה, ושפת התכנות PROLOG.

ספרי עזר:

מתמטיקה דיסקרטית של האוניברסיטה הפתוחה.

Uwe Schoning: Logic for computer Scientists

Edmond Burke & Eric Foxley: Logic and its applications

בלה צירולניקוב: פרולוג שפת בינה מלאכותית

Ivan Bratko: Prolog: Programming for artificial inteligence.

W.F.Clocksin & C.S.Mellish: Programming in Prolog.

Leon Sterling and Ehud Shapiro: The art of Prolog

Richard A. Okeafe: The Craft of Prolog.

הציון הסופי ירכב משקלול של המבחן הסופי ועבודות הבית.
אחוז השקלול של עבודות הבית יקבע על ידי בסוף הקורס והוא
יהיה בין 10% ל- 20% .

העבודות תנתנה כל שבוע תבדקנה ע"י בודקים וינתן להן ציון. מבין
העבודות ילקחו כל הציונים למעט הרע ביותר, והממוצע

שלהן יחושב ויהיה ציון עבודות הבית. אין להגיש עבודה באחור אלא באשור שלי מראש בכתב. אפשר להגיש עבודה בזוגות. לשעורי הבית יפורסמו פתרונות. אבקש לא להגיש לי עבודות
לתא.

חלק מתרגילי הבית מופיע באתר של הקורס לוגיקה/לוגיקה ותכנות לוגי שהעבר ע"י דוקטור סמי זעפרני. כתובת האתר היא
mars.netanya.ac.il/~logic/:

יתכנו שנויים בכל ההנחיות הללו באם יוצר צורך בכך. אם יוצר כזה שנוי אשתדל להודיע עליו בהקדם האפשרי.

קבץ זה נמצא בבניה במהלך שנת התשס"ב ויתכנו בו שנויים ושגיאות. הקבץ הקובע הוא הקבץ הסופי שיקבע עד סיום הסמסטר.
אעשה כמיטב יכלתי לתקן את השגיאות בהקדם האפשרי. מי שהשגיאות מפריעות לו, כדאי שיעתיק את השעור מהלוח ולא יסתמך על הקבץ הזה.

חומר המבחן: כל מה שרשום בקבץ זה. במקרה והכתות לא תגענה לאותו מקום על פני הקבץ, יערכו שעורי השלמה כך שכל הכתות תספקנה את החומר המקסימלי.

תודות: אני לומד להשתמש במחשב תוך כדי מהלך הקורס. ברצוני להודות לאנשים שעוזרים לי בעצות אודות הפעלת המחשב בכלל, ולאנשים הבאים בפרט, שעזרו לי אישית במחשב במשרדי:
יוסי קסלסי מכתה 3 התשס"ב שהתקין את האתר ולמד אותי איך לתפעל אותו.
דן יהב מכתה 1 התשס"ב שעזר לי (יחד עם רון) לעשות הפניות שונות לקבצים נומרית1 ו-נומרית2 .
איל ספרן מכתה 2 התשס"ב שלמד אותי איך להתגבר על ה
- firewall.
שוב דן יהב מכתה 1 התשס"ב שעזר לי לעשות הפניה באתר לקבץ פרולוגיקה1 .
תודה לעופר הופמן מכתה 2 התשס"ב שמלמד אותי להשתמש ב- powerpoint
יוני מנדס מכתה 2 ורון מכתה 1 התשס"ב שלמדו אותי למצוא את האינדכס של אתר אינטרנט ולשנות אותו.
איליה ממחזור התשס"א שלמד אותי איך להכין קבץ prolog ואיך להריץ אותו.

בזכות עזרתכם אני לומד, וגם נותן שרות טוב יותר לכלל התלמידים.

חומר הקורס:

1.לוגיקה-תחשיב פסוקים.

2.לוגיקה- תחשיב פרדיקטים.

3.מבוא לשפת התכנות PROLOG.

אני מאחל לכם הצלחה בקורס.

פרק ראשון: תחשיב הפסוקים (חזרה והעמקה)

סעיף א טענות אטומיות

טענה היא פסוק שלו מותאם ערך אחד מבין שנים: אמת (המסומנת גם ב- 1 או ב- T) ושקר (המסומן גם ב- 0 או ב- F).

סטיה מהחומר של הקורס לדיון בנושא של לוגיקה לא סטנדרטית.

ישנה גישה חדשה בלוגיקה הנקראת לוגיקה לא סטנדרטית (FUZZY LOGIC). בגישה זו יש יותר משני ערכי אמת, כמו למשל נכון/ לא נכון/ אולי וכן הלאה.

לוגיקה זו קשורה גם להסתברות וגם לאנליזה נומרית. החלק הקשור לנומרית לא כוסה בשנת התשס"ב.

להסתברות כי מתאימים לטענה הסתברות שהיא נכונה: מספר בין 0 (שקר) ו- 1 . ככל שהמספר גדול יותר ההסתברות לאמת גדולה יותר.

כדי להבין את הקשר עם נומרית, נשאל את עצמנו האם מטריצה

מסוימת הפיכה. בלוגיקה הישנה (שבה בלבד נעסק בקורס זה החל מהעמוד הבא)ישנן שתי אפשרויות: או שהמטריצה אכן הפיכה (ערך אמת 1) או שלא (ערך אמת 0).

הדטרמיננט מאד מזכיר את ערכי האמת: $\det(A)=0$ אם ורק אם המטריצה לא הפיכה. לכן נראה כי ככל שהדטרמיננט יותר גבוה בערכו המוחלט המטריצה 'יותר' הפיכה. מסתבר שזה מתאים לנוסחת מציאת המטריצה ההפוכה:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

כאשר המונה היא מטריצה המתקבלת מ- A על ידי כל הדטרמיננטים של תת מטריצות $(n-1)\times(n-1)$ (הקרויות בלע"ז מינורים) כפולות בסימן $(-1)^{I+j}$. ואכן מסתבר כי ככל שהדטרמיננט קרוב יותר ל- 0 המטריצה פחות הפיכה לפחות במובן נומרי: המספר ההפכי של $\det(A)$ הוא יותר גדול בערכו המחלט, לכן כך גם אברי A^{-1}. לכן מבחינה נומרית (וגם מבחינת השמוש במחשב) צריך יותר סיביות בתאים ובאוגרים כדי לחשב את ההפכית, ולכן בהנחה שמספר הסיביות קבוע במחשב, ככל שהדטרמיננט יקרב ל- 0 צופים שנאלץ לקצץ יותר ויותר ספרות, והאיכות הנומרית של הפתרון תקטן. השם של מערכות 'רעות' כאלו הוא ill conditioned systems.

נחזור ללוגיקה רגילה שבה יש רק שני ערכי אמת.

הערה אודות ערכי האמת. יש טענות שקל מאד לחשב את ערכי האמת שלהן: למשל: $2=1+1$, היום יורד גשם. יש טענות, אפילו במתמטיקה שקשה יותר לדעת את ערכי האמת שלהן: למשל: לכל מספר טבעי n המקים $n>2$, לא קימים מספרים טבעיים x,y,z כך שמתקים $x^n+y^n=z^n$. טענה זו ידועה כיום כנכונה אבל היתה ידועה במשך שנים רבות כהשערת פרמה Pierre de Fermat 1665. השערה זו הוכחה רק לאחרונה כנכונה על ידי Andrew Wiles. יש השערות רבות במתמטיקה ובעצם בהרבה נושאים שעדין לא ידוע ערך האמת שלהן: למשל השערת רימן, שאיננה פתורה עד היום:

לכל מספר מרוכב $s=x+iy$ נגדיר את הפונקציה שהגדרה ע"י אוילר ורימן

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

השערת רימן: הנקודות בהן הפונקציה שוה ל- 0 הן כאשר x=0.5.
עוד דוגמאות להשערות שכרגע איננו יודעים מהו ערך האמת שלהן למרות שערך האמת שלהן קים: תוך שני מיליארד שנים השמש תקרוס, תוך שנתים גילה וגיל יתחתנו, תוך 5 שנים יחתם הסכם שלום כולל בין ישראל והפלסטינים, בשנת התשס"ב תחול מלחמת עולם וכדומה.

תת טענה- נתונה טענה p. אז תת טענה של p היא טענה q שנמצאת בתוך הטקסט של p.

דוגמה: היום ירד גשם ויהיה קר. טענה זו מכילה שתי תתי טענות:
q=היום ירד גשם r= היום יהיה קר

טענה אטומית- זוהי טענה שאין לה תתי טענות

סעיף ב – קשרים לוגיים, טבלאות אמת, אלגברה בוליאנית (Boole)

קשר לוגי פועל על כמה טענות ויוצר מהן טענה מרכבת יותר.

דוגמה קשר החתוך (וגם, קוניונקציה, and, ∧)

החתוך של p ושל q נכון רק כאשר גם p וגם q נכונים.
הקשר חתוך נתן להצגה על ידי טבלת אמת. טבלת אמת מתארת את כל מצבי האמת האפשריים של הטענות p ו- q.
יש ארבע מצבים, ולכל מצב טבלת האמת מתארת את ערך האמת של p∧q. להלן טבלת האמת של הקשר ∧.

p∧q	Q	P
0	0	0

0	1	0
1	0	0
1	1	1

כל קשר ניתן ליצוג על ידי טבלת אמת.

להלן טבלת האמת של הקשר או- דיסיונקציה, or, $\vee$:

P	Q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ולהלן טבלת האמת של קשר השלילה, not, $\neg$

P	$\neg p$
0	1
1	0

טאוטולוגיה, סתירה

נסמן ב- 1 טענה שנכונה תמיד שתקרא טאוטולוגיה וב- 0 טענה שתמיד איננה נכונה ושתקרא סתירה.

קשרים אונריים, בינריים, טרינריים וכדומה

מדוע טבלת האמת של אחוד וחתוך כוללת 4 שורות ושלש עמודות וטבלת האמת של שלילה כוללת רק שתי עמודות ושתי שורות? הסבה היא שהקשר שלילה פועל רק על משתנה יחיד, ואילו אחוד וחתוך פועלים על שני משתנים. הדרך הנכונה היא להביט על הקשרים כעל פונקציות, אשר המשתנים שלהם

הם טענות. קשר כמו קשר השלילה הוא פונקציה במשתנה אחד או קשר אונרי. קשר כמו אחוד או חתוך הם קשרים בשני משתנים או קשרים בינריים, וישנם גם קשרים בני שלשה משתנים-טרינריים, קואדרופולריים וכדומה.

מספר הקשרים

מהו מספר כל הקשרים האונריים האפשריים? כל קשר מבוטא על ידי טבלת אמת. קשר אונרי מבוטא על ידי טבלה בת שתי שורות ועמודות. בעמודה השמאלית ישנם שני הערכים האפשריים של המשתנה p, ובעמודה הימנית ערכי הקשר הפועל על p. בכל שורה
יש אפשרות לבחר בין שני פלטים, ולכן יש $2\times2=4$ קשרים אונריים.
נרכז אותם בטבלה הבאה:

F4(p)	F3(p)	F2(p)	F1(p)	p
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1

נשים לב כי F2(p)=p, כלומר הקשר F2 הוא קשר הזהות שבו הקלט שוה לפלט. כמו כן נשים לב כי $F3(p)=\neg p$, כלומר הקשר F3 הוא קשר השלילה. הקשר F1 מחליף כל טענה בטענת סתירה, ו- F4 מחליף כל טענה בטאוטולוגיה.

כמה קשרים של שני משתנים ישנם? לכל קשר יש 4 שורות ולכל שורה יש שתי אפשרויות, ולכן $2^4=16$ קשרים. ושל שלשה משתנים יש $2^8=256$ קשרים. סך הכל יש $_2(2^n)$ קשרים ב- n משתנים. רשימת כל הקשרים בשני משתנים מופיעה בדפי ההרצאה של שנה שעברה בקורס דיסקרטית של פרופסור שניידר, בעמוד 11.

אלגברה בוליאנית (Boole)יאנית.

הקָשרים $\neg,\vee,\wedge$ הם בעלי קְשרים ביניהם וקשרים אלו קרויים על שמו של המתמטיקאי George Boole שגלה ראשון את החוקים הבאים:

חוקי 0 ו – 1

לכל טענה p, $1 .\ 0\vee p=p$ $\ 2 .\ 1\wedge p=p$ $\ 3 .\ \neg 0=1$ $\ 4 .\ \neg 1=0$

$5 .\ 0\wedge p=0$ $\ 6 .\ 1\vee p=1$

חוקי אידמפוטנציה

לכל טענה p, $7 .\ p\vee p=p$ $\ 8 .\ p\wedge p=p$

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקיים

$9 .\ \neg(\neg(p))=p$ $\ 10 .\ p\vee(\neg p)=1$ $\ 11 .\ p\wedge(\neg p)=0$

חוקי פלוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקיים

$12 .\ p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ $\ 13 .\ p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

חוקי קבוץ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקיים

$14 .\ p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$ $\ 15 .\ p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\wedge r$

חוקי חלוף (קומוטטיביות)

לכל טענות p ו- q מתקיים

$16 .\ p\vee q=q\vee p$ $\ 17 .\ p\wedge q=q\wedge p$

חוקי דה- מורגן

$18 .\ \neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$ $\ 19 .\ \neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$

קְשרים בין הקְשרים

מסתבר כי 19 הקשרים המופיעים ברשימה זו כוללים באיזשהו מובן את אותן עובדות כמה פעמים. נמחיש זאת על ידי הדוגמה הבאה.

דוגמה

הוכח את כלל 19 מתוך שאר הכללים.

נביט על כלל 19 וננסה מתוך אגף שמאל להגיע לאגף ימין.

נביט באגף שמאל של טענה 19 : $\neg(p\wedge q)$

לפי כלל 9 $\neg(\neg(p))=p$, וכנ"ל ל-q . נשתמש בכך וצד שמאל של 19 יהפך להיות: $\neg(p\wedge q)=\neg[\neg(\neg(p))\wedge\neg(\neg(q))]$.

מרוב מינוסים לא רואים את היער. נסמן זמנית $\neg(p)=a$ ו- $\neg(q)=b$. אז הבטוי הקודם הופך להיות: $\neg[(\neg a)\wedge(\neg b)]$

כעת, הבטוי בתוך הסוגרים הרבועים הופך להיות מאוד דומה לאגף ימין של כלל 18 , ולכן לפי כלל 18 נוכל לכתב את הבטוי שצריך להוכיח בצורה: $\neg[\neg(a\vee b)]$.

כעת לפי כלל 9 נקבל כי הבטוי האחרון שוה ל- $a\vee b$. נציב חזרה את a ואת b ונקבל כי הבטוי האחרון שוה ל- $(\neg p)\vee(\neg q)$. זהו הבטוי שאליו צריך להגיע ב- 19 .

תרגיל בית מספר 1 להגשה בכתב תוך שבוע.

הוכח בצורה דומה את כללים 13 , 15 ו- 17 .
רמז: לגבי כל אחד השתמש בכלל הקודם לו במספר ובכללי דה מורגן.

הצגת טענה על ידי עץ

בהנתן טענה מורכבת (באם היא כתובה כהלכה), ישנו קשר יחיד שהוא הקשר האחרון של אותה טענה. אחרי שנזהה אותו, נשים לב אם הוא אונרי, בינרי, טרינרי וכדומה. אם הוא אונרי, יש לו צאצא שהיא טענה יותר פשוטה. אם הוא בינרי, יש לו שני צאצאים, וכל אחד יותר פשוט. כנ"ל אם הוא טרינרי וכד'.

נציר עץ. השרש של העץ הוא הקשר האחרון של אותה טענה. העלים של העץ הם תתי הטענות הקשורות לאותו קשר. באינדוקציה, נפרק כל תת טענה לקשר ראשי שיהיה השרש של תת הטענה, ולצאצאים.

דוגמה: פרק את הטענה $\neg[(p\wedge q) \vee (\neg (p\wedge (\neg q)))]$ והצג אותה כעץ.
פתרון
נשים לב כי הקשר האחרון שפועל כאן הוא קשר השלילה. זהו קשר אונרי בעל צאצא יחיד. הצאצא שלו הוא התוכן של הסוגרים המרובעים. הקשר האחרון של הצאצא הוא קשר האחוד היחיד המופיע בטענה. יש לושני צאצאים, כיון שהוא בינרי. הצאצא השמאלי הוא בעל קשר אחרון: קשר החתוך, ולו יש שני אטומים כצאצאים. נלך לצאצא הימני של האחוד. הקשר האחרון שם הוא קשר השלילה בעל צאצא יחיד. כך נמשיך. את התוצאה של הפרוק נרשום בעץ הבא המיצג את הטענה:

			$\neg$				
			$\vert$				
			$\vee$				
		/		\			
	$\wedge$				$\neg$		
/		\			$\vert$		
P			Q		$\wedge$		
				/		\	
				P			$\neg$
							$\vert$
							Q

תרגיל בית מספר 2 להגשה בכתב עוד שבוע

פרק את הטענות המרכבות הבאות לעצים:

1. $(\neg (p\wedge(\neg q))) \vee (q\wedge (\neg p))$
2. $(\neg ((p\wedge q) \vee r)) \vee ((q\wedge (\neg p)) \wedge(p\vee r))$

שחזור הכתיב הרגיל של טענה מתוך העץ

בהנתן טענה הכתובה כעץ, ניתן לכתב אותה בכתיב רגיל, למשל על ידי שחזור מלמטה למעלה. מביטים על הקשר הנמוך ביותר האפשרי, ומסמנים בסוגרים את התוצאה של הפעלתו על העלים הנובעים ממנו. מחליפים את הקשר באותם סוגרים וממשיכים להתקדם כך מלמטה למעלה.

דוגמה. בטבלה הקודמת הקשר התחתון ביותר הוא קשר השלילה. הוא פועל על עלה יחיד q. לכן נבנה טבלה חדשה ובה נכתב במקום הקשר את כל הבטוי (¬q). את כל שאר הבטויים נשאיר כמקדם, ונקבל את הטבלה הבאה:

			¬				
			|				
			∨				
		/		\			
	∧				¬		
/		\			|		
P			Q		∧		
				/		\	
				P			(¬q)

כעת הקשר הנמוך ביותר הוא החתוך הימני. נחליף אותו בטענה שהוא אחרון בה, ונקבל טבלה קטנה יותר:

			¬		
			|		
			∨		
		/		\	
	∧				¬
/		\			|
P			Q		p∧(¬q)

נשים לב כי בכל שלב הטבלה קטנה בגדלה, אך לעומת זאת חלק מהאיברים שלה נהיים יותר מרכבים. בשלב הבא נציב גם במקום השלילה שמימין וגם במקום החתוך שבשמאל, ונקבל טבלה חדשה:

		¬		
		|		
		∨		
	/		\	
p∧q				¬(p∧(¬q))

כעת במקום האחוד היחיד נכתב את כל הטענה שבתוך הסוגרים הרבועים ונקבל טבלה קטנה:

		¬		
		|		
		[ ]		

וכשלב סופי נקבל את הטענה המקורית.

תרגיל בית מספר 3 להגשה בכתב עוד שבוע:
המשך את תרגיל בית מספר 2 ויצר את הכתב הרגיל מתוך העץ לגבי כל טענה.

העומק של העץ

לאחר שטענה מסוימת נכתבה בעץ, אפשר להביט על ההגדרה הרגילה של עמק של עץ. זהו הארך המקסימלי של שרשרת המתחילה בשרש העץ ומסתימת באיזשהו עלה של העץ. בדוגמה הקודמת העמק הוא 5 . שרשרת בעמק 5 מתחילה בשרש, ממשיכה למטה מהשלילה לאחוד, אחר כך ימינה מהאחוד לשלילה, אחר כך

למטה מהשלילה לחתוך, אחר כך ימינה מהחתוך לשלילה, ולבסוף למטה מהשלילה לאטום q.

'הוכחת' חוקים על ידי טבלאות אמת (תוך כדי שמוש בעץ)

ניתן להבין בצורה עמוקה יותר את ההוכחות שנלמדו בכתה לטענות לוגיות, תוך כדי שמוש בטבלאות אמת. נביט למשל על כלל מספר 12 , חק הפלוג של החתוך מעל האחוד: $p\wedge (q\vee r)=(p\wedge q) \vee (p\wedge r)$.

נציג כל צד כעץ. נעבר על מספר האטומים שיסומן n. נכין 2^n מקרים של ערכים על כל עלה. נתחיל לטפס בעץ מלמטה למעלה, ובכל קדקד נחשב את הערך של הקשר על סמך הערכים של הצאצאים שלו.

דוגמה:

נביט שוב בחק הפלוג מספר 12 . $p\wedge (q\vee r)=(p\wedge q) \vee (p\wedge r)$. נציג את צד שמאל כעץ באורך 2 .

		$\wedge$				
	/		\			
P				$\vee$		
			/		\	
			Q			R

כיון שיש בצד זה שלשה אטומים, הרי שמתאימים 8 מקרים, כלומר נכתב מתחת ל- p את הספרות: 00001111 , מתחת ל- q את הספרות 00110011, ומתחת ל- rאת הספרות 01010101. נתחיל לטפס ומתחת לכל קשר נרשם את תוצאתו. קודם מתחת לאחוד ואח"כ מתחת לחתוך, ונקבל:

		$\wedge$				
	/	0000011 1	\			
P				$\vee$		

00001111			/	01110111	\	
			Q			R
			00110011			01010101

כעת נכין טבלה לאגף ימין, נמלא ערכי אמת לאטומים ונטפס מלמטה למעלה ונקבל:

					∨				
			/		00000111	\			
		∧					∧		
	/	00000011	\			/	00000101	\	
p				Q	p				R
00001111				00110011	00001111				01010101

וכיון שיצא אותו ערך בקשר השרש, הרי ששתי הטענות שקולות.

תרגיל בית מספר 4 להגשה בכתב בעוד שבוע.

הוכח על ידי טבלת אמת וגרף את החוקים: חק הקבוץ מספר 14 ואת חקי דה מורגן מספרים 18 ו- 19 .

כתיב פולני קדמי ואחורי

מעבר על העץ המתאים לטענה עוזר להבין את צורת כתיבתה בכתיב פולני קדמי ואחורי. בשתי צורות הכתיב, אין צרך בסוגרים כדי לכתב טענה, אפילו

אם היא מסבכת. בכתיב קדמי, (prefix), עוברים על פני העץ, מתחילים מהשרש, ואחריו כותבים קודם את הצאצא הימני. כך ממשיכים עד למטה, תמיד מצד שמאל, וכשמגיעים למטה משמאל, מתחילים לעלות עם הצאצאים הימניים:

דוגמה: נמשיך עם הדוגמה שהתחילה בעמוד 8 , ובעץ שלה בעמוד 9 . נכתב את הטענה בכתיב פולני קדמי כך: $\neg\vee\wedge pq\neg\wedge p\neg q$

נוכל גם לכתב את הבטוי בכתיב פולני אחורי, (suffix). הפעם נתחיל שוב מהשרש של העץ, ובכל צמת אפשרי נעדיף את הצאצא הימני. לדוגמה, עבור הדוגמה בעמודים 8 ו- 9 נקבל את ההצגה:
$pq\wedge pq\neg\wedge\neg\vee\neg$

תרגיל בית מספר 5 להגשה בכתב בעוד שבוע

כתוב כל אחת מהטענות הבאות בכתיב פולני קדמי ואחורי:
1. $[([\neg p] \vee q) \wedge(\neg r)] \wedge[(p\vee(\neg r))\wedge (s\vee(\neg r))]$
2. $\neg \{[([\neg p] \wedge(\neg q)) \vee r] \wedge[((\neg p)\wedge r)\wedge (s\vee(\neg r))]\}$

6-3-2002-03

צורות דיסיונקטיבית נורמלית (disjunctive normal form-dnf)

ישנה צורה נוספת לכתב כל טענה. העץ של צורת כתיבה זו הוא בעל צורה מיוחדת: כל הענפים העליונים הם ענפים היוצאים מתוך אחוד, כל ענפי הבינים יוצאים מתוך חתוך, אם יש מינוסים, הם נמצאים על הענפים התחתונים, ולמטה בעלים נמצאים האטומים.

דוגמה:
נביט בטענה $(\neg p) \vee [((p\wedge q)\wedge (\neg r)) \vee ((p\wedge (\neg q)) \wedge r)]$. נציר אותה כעץ, ונקבל:

								∨		
							/		\	
						∨				¬
					/		\			|
				∧				∧		P

			/		$\backslash$			/		$\backslash$	
		$\wedge$				$\neg$	$\wedge$				R
	/		$\backslash$			$\vert$	P	$\backslash$			
p				Q		R			$\neg$		
									$\vert$		
									Q		

כל שרשרת שנעקב אחריה, מתחילה מלמעלה על ידי אחוד אחד לפחות ואולי כמה אחודים. אחר כך יתכנו לה חתוכים (יתכן מצב שבו אין חתוכים), ואחר כן יתכן שתהיה שלילה (ואפשרי שלא). לבסוף כל שרשרת מסתימת באטום.

נרשה לעצמנו להשתמש בחקי הקבוץ, ולחשוב על אחוד ועל חתוך כעל קשרים בני יותר משני משתנים. למשל את הכלל
$(a\wedge (b\wedge c))=((a\wedge b) \wedge c)$ נוכל לכתוב כ- $a\wedge b\wedge c$, ולחשב עליו כעל עץ עם שרש יחיד שהוא סימן החתוך, וממנו יוצאים שלשה ענפים, אחד ל-a , אחד ל-b ואחד ל-c . בכך נוכל לשנות את העץ המתאים לטענה. נפסיד בכך שיהיו לנו קדקדים בני כמה צאצאים, יותר אולי מ- 2, ונרויח בכך שיהיו לנו פחות שלבים ועומק העץ יקטן. במקרה זה נקבל את ההצגה של הטענה האחרונה על ידי העץ הבא:

				$\vee$		
		/	/	$\vert$	$\backslash$	
	$\wedge$			$\wedge$		$\neg$
/	$\vert$	$\backslash$	/	$\vert$	$\backslash$	$\vert$
p	Q	$\neg$	P	$\neg$	R	P
		$\vert$		$\vert$		
		R		Q		

כעת, נדרוש דרישות נוספות מצורה דיסיונקטיבית נורמלית. נדרוש שיש קשר אחוד יחיד בשרש העץ, וכן, שכל שרשרת היוצאת מהשרש חיבת לעבור דרך קשר חתוך אחד בדיוק, וכן, שלכל קשר חתוך יש אותו מספר צאצאים אל אותם אטומים ב $\pm$. שני החתוכים מקימים את הדרישות הנוספות, כיון ש- כל שרשרת הממשיכה מהם היא בעלת שלשה עלים, במשתנים p, q ו- r. ההבדל בין שני סימני החתוך מתבטא במינוסים שיוצאים ממנו כלפי מטה.

דוגמה

נביט על הטענה
$[((p\wedge q)\wedge(\neg r))\vee((p\wedge(\neg q))\wedge r)]\vee[(\neg p)\wedge((\neg q)\wedge r)]$. טענה זו שוה לטענה של הדוגמה הקודמת בשני החלקים הראשונים שלה, אך המחובר השלישי הקרוי גם הדיסיונקט השלישי השתנה. הצגה מתאימה על ידי עץ היא:

				$\vee$				
		/	/	|	\	\		
	$\wedge$			$\wedge$			$\wedge$	
/	|	\	/	|	\	/	|	\
		$\neg$		$\neg$		$\neg$	$\neg$	
p	Q	R	P	Q	R	P	Q	R

זוהי דוגמה לטענה בצורה דיסיונקטיבית נורמלית.

הבאת צורה כלשהיא לצורה דיסיונקטיבית נורמלית.
נמשיך את הדוגמה לפני האחרונה. שני הדיסיונקטים הראשונים הם בצורה נורמלית, אך הדיסיונקט השלישי, $\neg p$, איננו נורמלי. כדי לשנות זאת, נרשם $\neg p=\neg p\wedge 1\wedge 1=\neg p\wedge(q\vee(\neg q))\wedge(r\vee(\neg r))$. כעת נשים לב כי אפשר להשתמש פעמים בחקי הפלוג ולרשם:

$$\neg p=\neg p\wedge(q\vee(\neg q))\wedge(r\vee(\neg r))=[((\neg p)\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))]\wedge(r\vee(\neg r))=[((\neg p)\wedge q)\wedge r]\vee[((\neg p)\wedge(\neg q))\wedge(r)]\vee[((\neg p)\wedge(\neg q))\wedge r]\vee[((\neg p)\wedge(\neg q))\wedge(\neg r)]$$

כלומר הדיסיונקט $\neg p$ הוא סכום של ארבעה דיסיונקטים נורמליים, ולכן הטענה שבדוגמה היא סכום של ששה דיסיונקטים נורמליים.

עוד אודות הבאת צורה כלשהיא לצורה דיסיונקטיבית נורמלית.
מהם השלבים להעברת פסוק כלשהו לצורה דיסיונקטיבית נורמלית?

1 . החלפת כל קשר אחר על ידי בטויו על ידי אחוד, חתוך ושלילה. (שלב זה יהיה תקף רק לאחר שנתחיל לעסק בקשרים אחרים).

2 . הזזת ה- מינוסים פנימה לאטומים על ידי שמוש בחוקי דה מורגן.

3 . הזזת ה- חתוכים פנימה ל ± אטומים על ידי שמוש בחוקי הפלוג.

4 . השלמת אטומים חסרים בדיסיונקט כמו בדוגמה הקודמת.

נמחיש את השלבים הללו על ידי הדוגמאות הבאות.
17-2-2002-02
דוגמה

הבא ל- (dnf) את הטענה : $x\equiv\neg((p\wedge(\neg q))\vee r)$.

תשובה: שלב 1 מיותר כיון ש- אין בטענה אף קשר שאיננו אחוד חתוך או משלים. בשלב 2 נשתמש בחוקי דה מורגן כדי להכניס את כל המינוסים אל האטומים. יש משלים על q, והוא כבר בפנים, אבל המשלים השני נמצא בחוץ, ותוך שמוש בדה-מורגן נקבל:

$$x\equiv\neg((p\wedge(\neg q))\vee r)\equiv(\neg(p\wedge(\neg q)))\wedge(\neg r)\equiv((\neg p)\vee(\neg(\neg q)))\wedge(\neg r)\equiv((\neg p)\vee q)\wedge(\neg r)$$

בשלב זה סימנו עם שלב 2 , וכל המינוסים שישנם, צמודים לאטומים. נשים לב כי החתוך הוא השרש של הבטוי הקודם, ולצאצא השמאלי יש שרש אחוד. לכן יש שרשרת שבה החתוך נמצא מעל האחוד. לכן, כדי לעבר לשלב 3 , יש להשתמש בחק הפלוג, ונקבל:

$$x\equiv((\neg p)\vee q)\wedge(\neg r)\equiv((\neg p)\wedge(\neg r))\vee(q\wedge(\neg r))$$

בשלב זה, האחוד היחיד הוא השרש של העץ, וראשון בכל שרשרת. לכל צאצא יש שרש שהוא חתוך, ואחר כך יש לפעמים מינוסים, ולכן כעת הטענה היא בצורה דיסיונקטיבית, בעלת שני דיסיונקטים, אבל עוד לא בצורה דיסיונקטיבטית נורמלית, כיון שלדיסיונקט השמאלי חסר האטום $\pm q$, ולימני האטום $\pm p$. לכן יש להעביר את x על פני השלב הרביעי. נעביר כל דיסיונקט את השלב לחוד.

$$D1\equiv((\neg p)\wedge(\neg r))\equiv((\neg p)\wedge 1\wedge(\neg r))\equiv((\neg p)\wedge(q\vee(\neg q))\wedge(\neg r))\equiv((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))$$

כלומר D1 מרכב משני דיסיונקטים נורמליים. וכעת נחשב את D2.

$$D2\equiv(q\wedge(\neg r))\equiv(1\wedge q\wedge(\neg r))\equiv(p\vee(\neg p))\wedge(q\wedge(\neg r))\equiv(p\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))$$

כלומר גם D2 מרכב משני דיסיונקטים נורמליים.

לפני שנאחד את D1 עם D2, נשים לב כי הדיסיונקט $((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))$ משותף ל-D1 ול- D2 , וכי לפי חק האידמפוטנטיות מספר 7 , אחוד של בטוי עם עצמו שוה לעצמו, ולכן נקבל:

$$x\equiv D1\vee D2\equiv ((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))\vee(p\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))\equiv((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))\vee(p\wedge q\wedge(\neg r))$$

ולכן ה- dnf של x מכילה שלשה דיסיונקטים נורמליים.

דוגמה יותר מסובכת עם פחות הסברים.

17-2-2002-01

הבא ל- (dnf) את הטענה : $x\equiv\neg((\neg((q\wedge(\neg r))\vee p)\vee(p\wedge r))\vee q)$.

תשובה: שלב 1 מיותר. שלב 2 :

$$x\equiv\neg((\neg((q\wedge(\neg r))\vee p)\vee(p\wedge r))\vee q)\equiv\neg(\neg((q\wedge(\neg r))\vee p)\vee(p\wedge r))\wedge(\neg q)\equiv((q\wedge(\neg r))\vee p)\wedge(\neg(p\wedge r))\wedge(\neg q)\equiv((q\wedge(\neg r))\vee p)\wedge((\neg p)\vee(\neg r))\wedge(\neg q)$$

בשלב זה יש שני חתוכים בשרש העץ, ונעבר לשלב 3 :

$$x\equiv((q\wedge(\neg r))\vee p)\wedge((\neg p)\vee(\neg r))\wedge(\neg q)\equiv((q\wedge(\neg r))\vee p)\wedge[((\neg p)\wedge(\neg q))\vee((\neg r)\wedge(\neg q))]\equiv((q\wedge(\neg r)\wedge(\neg p)\wedge(\neg q))\vee(q\wedge(\neg r)\wedge(\neg r)\wedge(\neg q))\vee(p\wedge(\neg p)\wedge(\neg q))\vee(p\wedge(\neg r)\wedge(\neg q)).$$

וכמעט סימנו את שלב שלש עם ארבעה דיסיונקטים. אבל הראשון הוא אפס, כי הוא כולל את הבטוי $q\wedge(\neg q)$ ששוה לסתירה, וסתירה זו יש לחתוך עם טענות נוספות, ולכן, לפי חק מספר 5 , בטוי זה שוה לסתירה. הדיסיונקט השני גם הוא מכיל $q\wedge(\neg q)$ ולכן גם הוא שוה ל- 0 . הדיסיונקט השלישי כולל $p\wedge(\neg p)$ ולכן הוא 0 . לכן נותר רק הדיסיונקט הרביעי: $x\equiv p\wedge(\neg r)\wedge(\neg q)$. נסדר את שמות האטומים בסדר עולה- לקסיקוגרפי, ונקבל את הצורה הנורמלית הכוללת רק דיסיונקט אחד: $x\equiv p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r)$.

תרגיל בית מס 6 להגשה בכתב עוד שבוע

הבא את שתי הטענות ב- תרגיל בית מס 5 לצורה דיסיונקטיבית נורמלית. (על ידי אלגברה בוליאנית ולא ע"י מפות קרנו).

משפט: קיום ויחידות ההצגה הדיסיונקטיבית הנורמלית.

נתונה טענה שאיננה סתירה. אז קימת לה הצגה דיסיונקטיבית נורמלית. ההצגה יחידה במובן הבא: אם נתונות שתי הצגות dnf של אותה טענה, אז אחרי סדור הדיסיונקטים ההצגות הופכות זהות. נניח כי n הוא מספר האטומים. אז מספר הדיסיונקטים השונים הוא בין 1 ו- 2^n. מספר הדיסיונקטים שוה ל- מספר ערכי 1 בטבלת האמת של הטענה. ביחוד ל- טאוטולוגיה יש 2^n דיסיונקטים, ואפשר להביט על סתירה כעל מקרה של 0 דיסיונקטים. כמו כן צורת dnf של $\neg x$ מתקבלת מתוך צורת dnf של x על ידי כתיבת כל הדיסיונקטים שאינם מופיעים ב- x.

דוגמה

הטענות $(p\wedge q) \vee (p\wedge(\neg q))$ ו- $x\equiv (p\wedge(\neg q)) \vee (p\wedge q)$ הן זהות, ובעלות אותה צורה דיסיונקטיבית נורמלית. זאת ניתן להבחין לאחר שמחליפים את סדר הדיסיונקטים באחת ההצגות. אם נכין טבלת אמת עבור הטענה, יהיו בה שני 1 – ים, 1 עבור כל דיסיונקט, כפי שנראה בטבלה הבאה:

X	$p\wedge(\neg q)$	$P\wedge q$	$\neg q$	Q	p
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1

צורת ה cnf של $\neg x$ תכיל את הדיסיונקטים שאינם מופיעים ב- x, כלומר נקבל: $\neg x\equiv ((\neg p)\wedge(\neg q)) \vee ((\neg p)\wedge q)$

צורה קוניונקטיבית נורמלית (conjunctive normal form-cnf)

ישנה צורה אחרת להצגת טענה, הדומה מאד לצורה דיסיונקטיבית נורמלית, וקרויה צורה קוניונקטיבית נורמלית. בגדול, ההבדל הוא שבעץ ההצגה של הטענה, יש חתוך יחיד, ואח"כ כל שרשרת עוברת דרך אחוד, ואח"כ $\pm$ של אטומים. קל למצוא את הצורה הזו מתוך הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית, או מתוך טבלת האמת:

דוגמה: העבר את הטענה $x\equiv (p\wedge(\neg q)) \vee (p\wedge q)$ לצורה קוניונקטיבית נורמלית:

תשובה: $x\equiv\neg(\neg x)$. כעת נציב את $\neg x$ שאותה חשבנו בדוגמה הקודמת, $\neg x\equiv ((\neg p)\wedge(\neg q)) \vee ((\neg p)\wedge q)$. לכן, נקבל :

$x\equiv\neg(\neg x) \equiv\neg [((\neg p)\wedge(\neg q)) \vee ((\neg p)\wedge q)] \equiv[\neg ((\neg p)\wedge(\neg q))] \wedge [\neg((\neg p)\wedge q)] \equiv[p\vee q] \wedge [p\vee(\neg q)]$..

זוהי צורת ה cnf המתאימה ל x. נשים לב כי לכל 0 המופיע בטבלת האמת של x, ישנו קוניונקט אחד.

קשרים אחרים

עד עתה עסקנו רק בקשרים אחוד, חתוך ו- משלים. ישנם עוד הרבה קשרים אחרים, חשובים יותר או פחות. נגדיר אותם גם על ידי טבלאות אמת וגם על ידי אחוד חתוך ומשלים.

קשר הגרירה implication , if , $\rightarrow$

קשר זה מוגדר על ידי הטבלה הבאה:

$p\rightarrow q$	Q	P
1	0	0
1	1	0
0	0	1
1	1	1

מקור השם גרירה הוא בעובדה שאם ידוע כי הגרירה נכונה, ואם ידוע כי p נכונה, אז ה מחיב או גורר שגם q תהיה נכונה.

נשים לב על ידי טבלת אמת כי לטענה $\neg p\vee q$ יש אותה טבלת אמת כמו לטענה $p\rightarrow q$. ואכן טבלת האמת של הטענה $\neg p\vee q$ היא:

$\neg p\vee q$	Q	$\neg p$	P
1	0	1	0

0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

ולכן קבלנו את הקשר $p\rightarrow q\equiv\neg p\vee q$. שמוש בחוקי דה מורגן יתן גם את הקשר הבא: $p\rightarrow q\equiv\neg p\vee q\equiv\neg(\neg(\neg p\vee q))\equiv\neg(p\wedge(\neg q))$

קשר השקילות, הגרירה הכפולה, equivalence, if and only if, $\leftrightarrow$

נגדיר: $p\leftrightarrow q\equiv(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$ וכעת נפלג את החתוכים על פני האחודים ונקבל:

$p\leftrightarrow q\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\equiv((\neg p)\wedge(\neg q))\vee((\neg p)\wedge p)\vee(q\wedge(\neg q))\vee(q\wedge p)\equiv((\neg p)\wedge(\neg q))\vee 0\vee 0\vee(p\wedge q)\equiv(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$

נשים לב כי קבלנו הצגה דיסיונקטיבית נורמלית של הטענה.

<u>חוקי אלגברה בוליאנית הכוללים גרירה ושקילות.</u>

גרירה ושקילות הם קשרים חשובים. ישנם חוקי אלגברה בוליאנית נוספים על ה- 19 הקודמים, ונרשם אותם כאן:

נשים לב בטבלת האמת של גרירה, כי אם הגרירה נכונה (כלומר כל השורות בטבלה למעט השלישית), ואם גם p נכונה (כלומר שורה 3 או 4), אז אנחנו חיבים להמצא בשורה 4 , ואז מתחיב כי גם q נכונה. בזאת קבלנו את כלל 20 .

13-3-2002-03

<u>כלל 20 – modus ponens</u> $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$

הוכחה: $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q\equiv\neg[(\neg p\vee q)\wedge p]\vee q$, כאשר השתמשנו פעמים בהגדרה השקולה של גרירה. כעת נשתמש בחוק הפלוג בסוגרים המרובעים, ונקבל: $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q\equiv\neg[(\neg p\wedge p)\vee(q\wedge p)]\vee q\equiv\neg[0\vee(q\wedge p)]\vee q\equiv\neg[q\wedge p]\vee q$ כעת נפעיל את חוקי דה מורגן על הסוגרים ונקבל $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q\equiv\neg[q\wedge p]\vee q\equiv(\neg q)\vee(p)\vee q\equiv 1\vee p\equiv 1$, כלומר זוהי אכן טאוטולוגיה.

כעת נעבר לכלל מודוס טולנס. נניח כי $p\rightarrow q$ נכונה (כלומר כל השורות למעט השלישית), וכי q לא נכונה, כלומר שורות ראשונה ושלישית. לכן נותרה רק השורה הראשונה. במקרה זה p לא נכונה.

<u>כלל 21 – modus tolens</u> $[(p\rightarrow q)\wedge(\neg q)]\rightarrow \neg p$

נעבור לכלל הבא. נניח ונתון כי $p\rightarrow q$ וגם כי $q\rightarrow r$. נכונות p מחיבת לפי הגרירה הראשונה את נכונות q, וזו לפי הגרירה השניה מחיבת את נכונות r. כלומר, נכונות p מחיבת את נכונות r. כלומר $p\rightarrow r$ נכון. קבלנו את הטרנזיטיביות:

<u>כלל 22 טרנזיטיביות</u> $[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$

נשים לב כי אם $p\wedge q$ היא נכונה, אז בודאי ש- p נכונה, ונקבל את כלל הפרוט.

<u>כלל 23 כללי הפרוט</u> $p\wedge q\rightarrow p$, $p\wedge q\rightarrow q$.

נניח כי נתון $p\rightarrow q$, כלומר אנו לא בשורה השלישית. אם q לא נכון אז גם p לא נכון לפי מודוס טולנס. לכן נובע כי $(\neg q)\rightarrow(\neg p)$. אבל בהנתן הגרירה האחרונה נובע ממנה באותה צורה כי $\neg(\neg q)\rightarrow\neg(\neg p)$, או $p\rightarrow q$. לכן שתי טענות אלו שקולות ונקבל:

<u>כלל 24 כלל הקונטרפוזיציה</u> $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$.

נניח כי נתונה הטענה $p\vee q$ וגם נתונה הטענה $\neg p$. אז אינטואיטיבית כיון ש- p לא נכונה q חיבת להיות נכונה ונקבל:

<u>כלל 25 כלל cut</u> $[(p\vee q)\wedge(\neg p)]\rightarrow q$.

את הכלל הבא נכתב כבר ללא הספק:

<u>כלל 26 כלל אקספורטציה</u> $[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$

את כלל 27 הוכחנו על ידי טבלאות אמת.

<u>כלל 27 הגדרת גרירה</u> $[p\rightarrow q]\leftrightarrow[(\neg p)\vee q]$

<u>כלל 28 הגדרת שקילות</u> $(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p\rightarrow q) \wedge (q\rightarrow p)]$

<u>כלל 29 הגדרת שקילות</u> $(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p\wedge q) \vee ((\neg p)\wedge (\neg q))]$

<u>תרגיל בית מספר 7 להגשה עוד שבוע</u>

הוכח את כל החוקים מ- 21 עד 26 ע"ס החוקים 1-19 .

<u>דוגמה</u>

הבא את הפסוק הבא לצורה דיסיונקטיבית נורמלית ולצורה קוניונקטיבית נורמלית, דרך חוקי אלגברה בוליאנית (ולא על ידי מפות קרנו). הפסוק: $x\equiv (p\rightarrow q) \leftrightarrow\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\}$

תשובה: נעביר קודם את הבטוי לצורת dnf. לצרך זה נעבר את ארבע השלבים של המעבר.

שלב א: נבטא את הגרירה והשקילות על ידי בטוים בעזרת אחוד, חתוך ומשלים: נשתמש בחוקים 27 ו- 29 .

נקבל לפי חוק 29 :
$x\equiv[(p\rightarrow q) \wedge\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\}]\vee[(\neg (p\rightarrow q)) \wedge(\neg\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\})]$

ונקבל לפי חוק 27 :
$x\equiv[((\neg p) \vee q) \wedge\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\}]\vee[(\neg ((\neg p) \vee q)) \wedge(\neg\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\})]$

נביט על החלק הבא של x: $y\equiv\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\}$
ונקבל:
$y\equiv\{[((\neg p) \vee q\vee (\neg r))] \wedge r\}\equiv\{[((\neg p) \vee q)\vee (\neg r)] \wedge r\}\equiv\{((\neg p) \vee q) \wedge r\}\vee \{(\neg r) \wedge r\}\equiv\{((\neg p) \vee q) \wedge r\}\vee \{0\}\equiv ((\neg p) \vee q) \wedge r$

נביט על החלק של x: $z\equiv[((\neg p) \vee q) \wedge\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\}]$
ונקבל: $z\equiv[((\neg p) \vee q) \wedge\{[(q\vee (\neg r)) \vee (\neg p)] \wedge r\}]\equiv ((\neg p) \vee q) \wedge y$
ולכן: $z\equiv ((\neg p) \vee q) \wedge y\equiv ((\neg p) \vee q) \wedge[((\neg p) \vee q) \wedge r]$

נשים לב כי: $a\wedge (a\wedge b) \equiv (a\wedge a)\wedge b\equiv a\wedge b$. נפעיל זאת על הבטוי הקודם עבור $a\equiv (\neg p)\vee q),\ b=r$. ונקבל: $z\equiv ((\neg p)\vee q)\wedge r$. על בטוי זה נפעיל את חוק הפלוג ונקבל: $z\equiv ((\neg p)\wedge r)\vee(q\wedge r)$. בטוי זה הוא בצורה דיסיונקטיבית (ההיררכיה של הקשרים היא כפי שצריך), אבל לא בצורה דיסיונקטיבית נורמלית, כיון שבכל דיסיונקט (מחובר) יש רק שני אטומים מתוך שלשה. לכן נמשיך את הפתוח:

$$z\equiv ((\neg p)\wedge r)\vee(q\wedge r)\equiv((\neg p)\wedge 1\wedge r)\vee(1\wedge q\wedge r)\equiv ((\neg p)\wedge(q\vee(\neg q))\wedge r)\vee((p\vee(\neg p))\wedge q\wedge r)\equiv((\neg p)\wedge q\wedge r)\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee((\neg p)\wedge q\wedge r).$$

עוד נשים לב כי המחובר הראשון והרביעי שוים, ולכן נוכל לותר על אחד מהם, ובכך נקבל את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית של z.

$$z\equiv((\neg p)\wedge q\wedge r)\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r).$$

נוכל כעת להביט על החצי השני של x.

$w\equiv [(\neg((\neg p)\vee q))\wedge(\neg\{[(q\vee(\neg r))\vee(\neg p)]\wedge r\})]$. נשים לב כי החלק $(\neg\{[(q\vee(\neg r))\vee(\neg p)]\wedge r\})$ הוא $\neg y$ ולכן שוה ל: $\neg y\equiv\neg[((\neg p)\vee q)\wedge r]$. נשתמש בחוקי דה מורגן ונקבל: $\neg y\equiv[(p\wedge(\neg q))\vee(\neg r)]$. נפעיל את דה מורגן על החלק של w שאיננו ב $\neg y$, ונקבל: $w\equiv (p\wedge(\neg q))\wedge(\neg y)$. נסמן $a\equiv(p\wedge(\neg q))$, ואז: $w\equiv (p\wedge(\neg q))\wedge(\neg y)\equiv(p\wedge(\neg q))\wedge[(p\wedge(\neg q))\vee(\neg r)]\equiv a\wedge[a\vee(\neg r)]\equiv(a\wedge a)\vee(a\wedge(\neg r))\equiv a\vee(a\wedge(\neg r))\equiv(p\wedge(\neg q))\vee((p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))$ קבלנו שני דיסיונקטים, מהם אחד נורמלי ואחד לא. נוסיף את המשתנה r לדיסיונקט הלא נורמלי ונקבל:

$w\equiv (p\wedge(\neg q))\vee((p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))\equiv(p\wedge(\neg q)\wedge(r\vee(\neg r)))\vee((p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))\equiv(p\wedge(\neg q)\wedge r)\vee(p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))\vee(p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))$ נשים לב כי הדיסיונקט השני והשלישי שוים, ולכן נוריד אותו: $w\equiv(p\wedge(\neg q)\wedge r)\vee(p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))$. כעת נקבל את dnf(x)

$x\equiv((\neg p)\wedge q\wedge r)\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge(\neg q)\wedge r)\vee(p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))$. כשלב ראשון של מציאת cnf(x), נמצא את $dnf(\neg x)$. נרשם את המחוברים שאינם ב- x.

$$\neg x\equiv(p\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge q\wedge(\neg r))\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))$$

וכעת, נבצע דה-מורגן ונקבל את cnf(x).

$$x\equiv((\neg p)\vee(\neg q)\vee r)\wedge(p\vee(\neg q)\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)$$

<u>קשר ה xor, $\oplus$.</u>

נגדיר את הקשר הזה על ידי $\oplus\equiv\neg\leftrightarrow$, כלומר זהו המשלים של קשר השקילות. לכן נקבל באופן מידי את ההצגה הדיסיונקטיבית הנורמלית של xor מתוך זו של השקילות: $\oplus\equiv ((\neg p)\wedge q)\vee(p\wedge(\neg q))$
נכתב כעת את המשלים של קסור ונקבל (מה שכבר קבלנו)
$p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$. כיון שיש דמיון בין הבטוי והמשלים, נקבל כי $p\oplus q\equiv(\neg p)\leftrightarrow q\equiv p\leftrightarrow(\neg q)$

<u>קשר ה nand של Schefer המסמן $\uparrow$</u>

dnf

נגדיר $\uparrow\equiv\neg\wedge$, כלומר זהו המשלים של קשר החתוך. החתוך הוא בצורה דיסיונקטיבית נורמלית, וממנו אפשר על-ידי חקי המשלים למצא את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית שלו:

$$\uparrow\equiv ((\neg p)\wedge q)\vee(p\wedge(\neg q))\,)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$$

<u>קשר ה nor המסמן $\downarrow$</u>

נגדיר $\downarrow\equiv\neg\vee$, כלומר זהו המשלים של קשר האחוד. קל למצא את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית שלו: $\downarrow\equiv\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$

24-02-2002-01-02

<u>תרגיל בית מספר 8 להגשה עוד שבוע</u>

בטא את כל הפסוקים של תרגיל 5 ב-cnf. (אפשר מתוך ה- dnf)

<u>הוכחת טענות בלוגיקה פסוקית- באינדוקציה על עמק העץ</u>

דוגמה

נתון פסוק אשר מבוטא על ידי הקשרים $\neg$ ו- $\oplus$, ומכיל לפחות קסור אחד ולפחות שני אטומים. אז בצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית שלו, יש מספר זוגי של דיסיונקטים. (בצורה שקולה- בטבלת האמת שלו יש מספר זוגי של 1- -ים ו- 0 -ים).

הוכחה

נוכיח זאת על ידי זה שנכתב את הפסוק כעץ בעל עומק סופי, ונוכיח את הטענה באינדוקציה על העומק של העץ.

עץ בעומק אחד: על השורש להיות או שלילה או קסור. אודות הפסוק $\neg p$ הטענה לא מתיחסת, כיון שאין לו אף קסור ויש לו אטום יחיד, ולכן פסוק באורך אחד שהטענה מתיחסת אליו הוא מהצורה $p\oplus q$. לפסוק זה- קל לראות כי יש שני אחדים, ושני אפסים בטבלת האמת שלו, או מה ששקול, יש לו בצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית שני דיסיונקטים.

פסוק נוסף אפשרי בעומק 1 הוא הפסוק $p\oplus p$. המשפט לא מתיחס לפסוק זה כיון שיש לו רק אטום אחד.
(הערה – למרות זאת-לפסוק זה יש טבלת אמת בת שתי שורות וכל התוצאות הן f.לכן יש לו 0 אמיתות ו- 2 מסקנות שקר.)

נניח שנתון פסוק שהעץ שלו בגבה n. נניח שהטענה הוכחה עבור כל עץ שהאורך שלו קטן מ - n. נוכיח את הטענה לפסוק. (אינדוקציה כזו קרויה אינדוקציה חזקה). בראש העץ אפשרי שיופיעו שני קשרים: או שלילה או קסור.

אם שלילה, זוהי שלילה של פסוק בעל עץ באורך n-1 בדיוק, ואשר בתת הפסוק חיב להופיע לפחות קסור אחד ולפחות שני אטומים. אז לפי הנחת האינדוקציה, יש בתת הטענה מספר זוגי של 1 ים ומספר זוגי של 0 ים. אז השלילה תהפך פלוס למינוס ולהפך. לכן הטענה נכונה עבור העץ הנתון.

נניח כי בראש העץ מופיע קסור. אז יש לקשר שני צאצאים: אחד בדיוק באורך n-1, והשני באורך קטן או שוה ל- n-1. נפריד ל- 3 מקרים:

תת מקרה 1: כל אחד משני הצאצאים מורכב ממינוסים בלבד. לכן כל צאצא הוא $\pm$ של פסוק אטומי. הטענות מהצורה $(\pm p)\oplus(\pm p)$ אינן מתאימות לתנאי המשפט (למרות שהן מקימות את המסקנה כי לטענה $p\oplus p$ יש 0 אחדים ושני אפסים. לטענה $(\neg p)\oplus p$ יש שני אחדים ו- 0 אפסים, לטענה $(\neg p)\oplus(\neg p)$ יש 0 אחדים ושני אפסים. לטענה $p\oplus(\neg p)$ יש שני אחדים ו- 0 אפסים). לכן נותר להביט בטענות $(\pm p)\oplus(\pm q)$. לכל טענה כזו יש שני 0 ים ושני 1 ים.

תת מקרה 2: אחד בדיוק משני הצאצאים מורכב ממינוסים בלבד. לכן הוא $\pm$ של פסוק אטומי. הצאצא השני הוא פסוק המכיל מינוסים, וכן מכיל קסור אחד לפחות.

תת מקרה 2.1:

האטום היחיד של הצאצא בלי הקסור הוא אחד מהאטומים של הצאצא השני, ולצאצא עם הקסור יש לפחות שני אטומים. דוגמה למקרה זה: $(\pm p) \oplus (p\oplus q)$.
במקרה זה נשנה את הטענה p, כך שתכיל את כל האטומים על ידי שנוי מהצורה $p\equiv p\wedge 1\equiv p\wedge(q \vee(\neg q)) \equiv (p\wedge q) \vee (p\wedge (\neg q))$. שנוי זה מביא למצב שבו לצאצא חסר הקסור, וגם לצאצא עם הקסור, יש אותם אטומים, ויש מספר זוגי של + ים ושל – ים בכל צאצא.

תת מקרה 2.2:

האטום היחיד של הענף בלי הקסור, זהה לאטום היחיד של הענף עם הקסור. במקרה זה הפסוק הכולל מרכב רק מאטום אחד, ומקרה זה לא נכלל במשפט.

תת מקרה 2.3 :

האטום היחיד של הצאצא בלי הקסור אינו אחד מהאטומים של הצאצא עם הקסור ולצאצא עם הקסור יש לפחות שני אטומים. דוגמה למקרה זה: $(\pm p) \oplus (q\oplus r)$.
במקרה זה נשלים בצאצא שבו אין קסורים את כל האטומים של הצאצא שבו יש קסורים, ונשלים בצאצא שבו יש קסורים את האטומים של הצאצא חסר הקסורים. כל השלמה כזו מכפילה את מספר ה-1 ים ואת מספר ה-0 ים.

תת מקרה 2.4:

לצאצא חסר הקסור יש אטום יחיד למשל p, ולצאצא עם הקסור יש אטום יחיד למשל q. במקרה זה השלמת כל צאצא לצורת dnfתכפיל את מספר ה- 0 – ים וה- 1 – ים של כל צאצא.

סכום מקרה 2 . למעט מקרה 2.2 , בכל שאר המקרים המסקנה היא שיש מספר זוגי של 0 – ים ו- 1 – ים בכל צאצא.

מקרה 3 : שני הצאצאים של הקסור שבשרש, מכילים בעצמם קסורים. אם כל צאצא מכיל לפחות שני אטומים, אז יש לצאצא מספר זוגי של 0 – ים ו – 1 – ים . אם יש צאצא עם אטום יחיד, אז ישנו אטום נוסף אחד לפחות בצאצא השני, וכשנעביר את הצאצא לצורת dnf, יהיו לו מספר זוגי של 0 – ים ושל 1 – ים.

סכום תת מקרים 2 ו- 3:

במקרים אלו אנו מגיעים למסקנה כי יש לנו קסור בראש העץ, וכי שני הצאצאים מרכבים מאותם אטומים וכי יש לכל אחד מספר זוגי של 0 ים ושל 1 ים.

נוכיח כי גם בתוצאת השרש יש מספר זוגי של 0 ים ושל 1 ים. נסמן: 2n הוא מספר כל הדיסיונקטים האפשריים על סמך האטומים של הפסוק, 2k הוא מספר הדיסיונקטים בצאצא הראשון, 2m הוא מספר הדיסיונקטים בצאצא השני, r הוא מספר הדיסיונקטים המופיעים גם בצאצא הראשון וגם בצאצא השני. אז יש 2k-r דיסיונקטים המופיעים בצאצא הראשון אך לא בשני, 2m-r המופיעים בשני אך לא בראשון, ולכן מספר הדיסיונקטים של הטענה הגדולה הוא:

$$2k-r+2m-r=2k+2m-2r$$

כלומר, יש מספר זוגי של 1 – ים בטענה הגדולה. מספר ה- 0 –ים הוא: 2n-(2k+2m-2r) וגם זה מספר זוגי. לכן הוכחנו את מה שרצינו.

<u>מסקנה</u>

אי אפשר לבטא את הקשרים :$\downarrow$,$\uparrow$,$\rightarrow$,$\vee$, $\wedge$ על ידי שמוש במינוסים ובקסורים בלבד, כיון שבטבלת האמת שלהם יש מספר אי זוגי של 0 ים ושל 1 ים.

3-3-2002-02

<u>מערכת שלמה של קשרים</u>

קבוצה של קשרים תקרא מערכת שלמה של קשרים, אם ניתן באמצעותה לבטא כל קשר.

דוגמה: $\{\neg,\vee,\wedge\}$ היא מערכת שלמה של קשרים, שבאמצעותה בטאנו כל קשר אחר, ובאמצעותה הגדרנו אלגברה בוליאנית.

דוגמה: ראינו כי $\{\neg,\oplus\}$ איננה מערכת שלמה של קשרים ומצאנו חמישה קשרים שאי אפשר לבטא על ידם.

דוגמה: נבדק כי $\{\neg,\vee\}$ היא מערכת שלמה של קשרים. ואכן: $p\wedge q\equiv(\neg(\neg p))\wedge(\neg(\neg q))\equiv\neg[(\neg p))\vee(\neg q)]$ כלומר בטאנו פסוק זה על ידי אחוד ומשלים. כל קשר אחר המבוטא על ידי אחוד חתוך ומשלים יצליח להיות מבוטא על ידי אחוד ומשלים.

קשר אינטואיטיבי עם אלגברה לינארית
הדוגמה האחרונה מזכירה קצת את המושג של בסיס או קבוצה יוצרת במרחב וקטורי. אם קבוצה A יוצרת קבוצה B שיוצרת את כל המרחב, אז A יוצרת את כל המרחב.

<u>תרגיל בית מספר 9 להגשה הכתב בעוד שבוע</u>

I. הוכח שעל ידי קשר ה- nand אפשר לבטא את קשר השלילה.

II. הוכח שעל ידי קשר ה- nand אפשר לבטא את קשר החתוך.

III. הוכח כי קשר ה- nand מהוה מערכת שלמה של קשרים.

<u>תרגיל בית מספר 10 להגשה הכתב בעוד שבוע</u>

הבט על אוסף התרגילים באתר של ד"ר סמי זעפרני והגש בכתב את התרגילים הבאים מתוך קבץ תרגילים מספר 1 שבאתר: תרגיל 1, כל הסעיפים שמספרם מתחלק ב- 3 , תרגילים 3-5 כל האי- זוגיים בכל תרגיל, תרגילים 6- 8 , תרגיל 12 .

3-3-2002-01

<u>הוכחה לוגית על ידי טעונים תקפים</u>
נתונה קבוצת פסוקים $A=\{\varphi 1, \varphi 2,\ldots, \varphi n\}$, ופסוק נוסף ψ. נגיד כי ψ מוכח (יכיח) מ- A , אם יש טעון תקף המשתמש בפסוקים של A ומגיע לפסוק ψ.

נסמן זאת $A\vdash\psi$. טעון תקף הוא טעון המשתמש בחוקי האלגברה הבוליאנית 1-27 . אסור בטעון תקף להשתמש בטבלאות אמת. נשים לב כי אין צרך לדעת מהם המשמעויות של האטומים.
הגדרה זו משתמשת בתחביר של הפסוקים כלומר בעצים של הפסוקים ובמקום של הקשרים, אך לא במשמעות האמיתית של הפסוקים, כיון שלא נתנו משמעויות לאטומים p,q, וכדומה.

דוגמה

מצא טעון תקף עבור $\{p\rightarrow((\neg q)\vee r),p,q\}\vdash r$. נשים שוב לב כי אין צרך לדעת מהן המשמעויות של האטומים : p,q,r, כדי להסיק את נביעת הפסוק מהמערכת על ידי טעון תקף:

תשובה: נרשם ונמספר את הפסוקים הנכונים, את מה שצ"ל, ונתקדם שלב שלב תוך כדי שמוש בחוקים של אלגברה בוליאנית, אותם נצטט.

1. $p\rightarrow((\neg q)\vee r)$
2. p
3. q

צ"ל r
4. $(\neg q)\vee r$ 1,2 (MP)
5. $q\rightarrow r$ 4, (27)
6. r 5,3 , (MP)

ומצאנו טעון תקף.
17-3-2002-03
'הוכחה' אחרת

למרות שהוכחה פורמלית של טעונים תקפים אינה יכולה להסתמך על טבלאות אמת, נדגים באמצעות טבלת אמת את אותה הוכחה.

$P\rightarrow((\neg q)\vee r)$	$(\neg q)\vee r$	$\neg q$	R	Q	P
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

מהן השורות שבהן גם p גם q וגם $p\to((\neg q)\vee r)$ נכונים? רק השורה השמינית. במקרה זה גם r נכון.

הוכחה פורמלית אחרת

נשתמש בחוקי אלגברה בוליאנית אחרים. קודם נציג את מה שצ"ל בצורה הבאה: כיון שנתונים שלשה פסוקים נכונים, אז חתוכם נכון, והוא חיב לגרר את המסקנה: $[[p\to((\neg q)\vee r)]\wedge(p\wedge q)]\to r$. כעת נוכיח כי הפסוק הזה הוא טאוטולוגיה על ידי חוקי אלגברה בוליאנית. נציג כל גרירה על ידי אחוד ומשלים, ואח"כ נכניס את המשלים פנימה לפי דה-מורגן: נקבל:

$$[[p\to((\neg q)\vee r)]\wedge(p\wedge q)]\to r\equiv(\neg[[p\to((\neg q)\vee r)])\wedge(p\wedge q)])\vee r\equiv$$
$$\equiv(\neg[p\to((\neg q)\vee r)])\vee((\neg p)\vee(\neg q))\vee r\equiv(\neg(((\neg p)\vee(\neg q))\vee r))\vee$$
$$((\neg p)\vee(\neg q))\vee r\equiv(\neg a)\vee a\equiv 1$$

כאשר a היא הטענה $((\neg p)\vee(\neg q))\vee r$.

10-3-2002-02

דוגמה

מצא טעון תקף עבור $\{[(p\wedge q)\to r],\neg r,q\}\vdash\neg p$.

תשובה→)

1. $(p\wedge q)\to r$
2. $\neg r$
3. q

צ"ל $\neg p$

4. $\neg r\to\neg(p\wedge q)$, 1, (contraposition(24))

5. $\neg(p \wedge q)$, 2,4 (MP)
6. $(\neg p) \vee (\neg q)$,5, (De Morgan(19))
7. $q \rightarrow (\neg p)$,(27)
8. $\neg p$, 3,7 (MP)

<u>תרגיל בית מספר 11 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

עבור כל אחת מהמערכות הבאות, הצג טעון תקף:

$\{[(p \wedge q) \rightarrow r], p,q\} \vdash r$
$\{[(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)], r,p\} \vdash q$

10-3-2002-01

<u>פסוק שלא נובע מתוך קבוצת פסוקים</u> $\neg\models$

נתונה קבוצה של פסוקים $A=\{\varphi 1, \varphi 2,\ldots, \varphi n\}$, ופסוק נוסף ψ. ישבנו שעה וניסינו להוכיח כי הפסוק יכיח מהקבוצה. לא הצלחנו. אולי הפסוק לא יכיח מהקבוצה כלל? מסתבר שאפשר להוכיח שפסוק לא נובע מקבוצה על ידי טבלת אמת על האטומים. אם קימת שורה אחת לפחות שבה כל הפסוקים ב- A נכונים, אבל הפסוק הנוסף לא נכון, אז הפסוק לא נובע מהקבוצה, ונסמן $A \neg\models \psi$.

דוגמה

נביט על הקבוצה $A=\{p \rightarrow q,q\}$ ועל הפסוק $\psi = p$. הראה כי הפסוק לא נובע מהקבוצה:

תשובה

נביט בטבלת האמת הבאה:

$p \rightarrow q$	Q	P
1	0	0
1	1	0

1	0	0
1	1	1

ישנה השורה השניה בה כל אחת מטענות הקבוצה היא בעלת ערך אמת 1 , ואילו ערך האמת של הפסוק הנוסף הוא שקר. לכן אי אפשר להוכיח את הפסוק מהקבוצה.

<u>שאלה</u>

אם כל כך קל לבדוק הוכחה מקבוצה על ידי טבלאות אמת, מדוע המורה מתעקש על הוכחות של אלגברה בוליאנית ?

תשובה

אין הבדל ואת זה אומר משפט השלמות של Gödel. אבל בקרוב נתחיל את השליש השני של הקורס הקרוי תחשיב היחסים (פרדיקטים). זוהי לוגיקה המסתמכת על כל מה שלמדנו בשליש הראשון- תחשיב הפסוקים. יש שם דבר המחליף את טבלאות האמת – ושנקרא מודלים. עבור קבוצה סופית של פסוקים, יתכן מספר אינסופי של מודלים. במקרה זה אי אפשר לעבור על כל המודלים, ולכן נצטרך למצוא הוכחות תחביריות.

בנוסף, כמו כל בינה מלאכותית, אנו עוסקים בהוכחה אוטומטית של טענות. אנו מחפשים תהליך רקורסיבי שיעבד, ומעדיפים אותו על טבלת אמת.

סכום סוגי הוכחות של פסוק ψ מקבוצת פסוקים A

$A \vdash \psi$. אפשר להוכיח את הפסוק מתוך הקבוצה הוכחה תחבירית, (סינטקטית). הוכחה תחבירית מסתכלת רק על הצגה של כל פסוק מעל האטומים שלו, ומשתמשת רק בקשרים של כל פסוק ובמקומם היחסי בעץ, אך לא מנסה לתת משמעות, או ערך אמת לאף אטום. ההוכחה נובעת מחוקי האלגברה הבוליאנית 1-27 (ואולי בעתיד נוסיף חוקים נוספים).

$A \models \psi$. הוכחה משמעותית (סימנטית). עוברים על כל המשמעויות השונות של כל פסוק- (בתחשיב פסוקים-כל השורות בטבלת האמת, בתחשיב יחסים- כל המודלים). אם בכל מקרה שהפסוקים $\varphi 1, \varphi 2, \ldots, \varphi n$ נכונים גם הפסוק

ψ נכון, קבלנו הוכחה משמעותית. מספר השורות בטבלת האמת- סופי, ומספר המודלים בתחשיב היחסים- אינסופי.

משפט השלמות של Gödel. $(A \vdash \psi) \leftrightarrow (A \models \psi)$. במלים: קיום הוכחה תחבירית (סינטקטית) שקול לקיום הוכחה משמעותית (סימנטית)

מסקנה ממשפט השלמות של Gödel. $(A \neg\vdash \psi) \leftrightarrow (A \neg\models \psi)$. במלים: חוסר קיום הוכחה תחבירית (סינטקטית) שקול לחוסר קיום הוכחה משמעותית (סימנטית). או, מספיק למצוא שורה בטבלת האמת (או מודל בתחשיב היחסים), כך שכל הפסוקים ב- A נכונים בו, אבל ψ לא נכון, כדי להיות בטוח שאין הוכחה של ψ מ- A .

דוגמה

יהיו: $\varphi1=p\rightarrow (q\leftrightarrow (\neg r))$, $\varphi2=p\wedge ((\neg s) \rightarrow r)$, $\varphi3=(p\wedge s) \rightarrow \neg r$, $\psi= q\leftrightarrow s$. נסמן $A=\{\varphi1, \varphi2, \varphi3\}$.

I. בדק את הטענה $A \models \psi$ על ידי מעבר על טבלת אמת. (הוכחה משמעותית).

II. אם הגעת למסקנה כי א מתקים, מצא הוכחה תחבירית ל- טענה, כלומר הוכח כי $A \vdash \psi$.

תשובה: טבלת האמת תכיל 16 שורות של ערכי אמת ו- 13 עמודות, כלומר גם הוכחה משמעותית יכולה להיות ארוכה.

P	Q	R	S	¬r	¬s	Q ↔ (¬r)	Φ1	(¬s) → r	Φ2	p∧ s	Φ3	Ψ
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1

וכעת נביט על כל השורות שבהן כל אברי A נכונים. האם בכולן גם ψ נכונה או שבאחת מהן היא איננה נכונה. אלו רק שורות 11 ו- 14 ובשתיהן גם ψ נכונה. לכן לפי הוכחה משמעותית, אכן $A \models \psi$. עבור סעיף ב עלינו למצא הוכחה תחבירית לעובדה זו.

20-3-2002-03

1. $p\to (q\leftrightarrow (\neg r))$
2. $p\wedge ((\neg s) \to r)$
3. $(p\wedge s) \to \neg r$

צ"ל $q\leftrightarrow s$

4. P, 2(23 פרוט)
5. $(\neg s) \to r$, 2(23פרוט)
6. $q\leftrightarrow (\neg r)$, 4,1(MP)

7. $p \to (s \to \neg r)$, 3, (export)
8. $s \to \neg r$, 4,7, (MP)
9. $(\neg r) \to s$, 5, (24=contraposition)
10. $q \to (\neg r)$, 6,(הגדרת השקילות)
11. $(\neg r) \to q$, 6,(הגדרת השקילות)
12. $q \to s$, 10,9 (transitivity)
13. $s \to q$, 8,11 (transitivity)
14. $q \leftrightarrow s$, 12,13, (הגדרת השקילות)

<u>תרגיל בית מספר 12 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

חזור על הדוגמה הקודמת עבור:

1 . יהיו: $\varphi1= q\wedge (p \to r)$, $\varphi2==(q\wedge r) \to s$, $\varphi3=(q\wedge s) \to p$, $\psi= r\leftrightarrow s$.

2 . יהיו: $\varphi1= q\wedge (p \to r)$, $\varphi2==(q\wedge r) \to s$, $\varphi3=(r\wedge s) \to p$, $\psi= r\leftrightarrow s$.

17-3-2002-02

<u>משפט הדדוקציה</u>

נתונה קבוצה של פסוקים $A=\{\varphi1, \varphi2,\ldots, \varphi n\}$, ופסוק נוסף ψ. נניח כי הפסוק הנוסף הוא מהצורה $\psi =(\alpha\to\beta)$. אז העובדה $A \vdash \psi$ שקולה לעובדה $\{\varphi1, \varphi2,\ldots, \varphi n, \alpha \} \vdash \beta$. במלים: במקום הוכחה פורמלית ש- ψ יכיחה מ- A, שקול להוכיח כי β יכיחה מ- $A\cup\{ \alpha \}$.

דוגמה

נביט על הדוגמה לאחר משפט השלמות של גודל. נוכיח אותה לפי משפט הדדוקציה:

צ"ל כי $\{\varphi1, \varphi2, \varphi3,q\} \vdash s$ וכי $\{\varphi1, \varphi2, \varphi3,s\} \vdash q$.

נוכיח כי $\{\varphi1, \varphi2, \varphi3,q\} \vdash s$

1. $p \rightarrow (q \leftrightarrow (\neg r))$
2. $p \wedge ((\neg s) \rightarrow r)$
3. $(p \wedge s) \rightarrow \neg r$
4. q

צ"ל s

5. P, 2(23 פרוט)
6. $(\neg s) \rightarrow r$, 2(23פרוט)
7. $q \leftrightarrow (\neg r)$, 5,1(MP)
8. $q \rightarrow (\neg r)$, 7,(הגדרת השקילות)
9. $\neg r$, 8,4, (MP)
10. $(\neg r) \rightarrow s$, 6, (24=contraposition)
11. s, 9,10, (MP)

נוכיח כי $\{\varphi 1, \varphi 2, \varphi 3, s\} \vdash q$

1. $p \rightarrow (q \leftrightarrow (\neg r))$
2. $p \wedge ((\neg s) \rightarrow r)$
3. $(p \wedge s) \rightarrow \neg r$
4. s

צ"ל q

5. P, 2(23 פרוט)
6. $p \rightarrow (s \rightarrow \neg r)$, 3, (export)
7. $s \rightarrow \neg r$, 5,6, (MP)
8. $\neg r$, 4,7 (MP)
9. $q \leftrightarrow (\neg r)$, 5,1(MP)
10. $(\neg r) \rightarrow q$, 9,(הגדרת השקילות)

נשים לב כי כל חצי הוכחה קצת יותר קצרה מההוכחה המלאה, וכי בעצם בכל חצי הוכחה השתמשנו בחלק אחר של ההוכחה המלאה.

<u>תרגיל בית מספר 13 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

פתור את המערכות שבתרגיל בית מספר 12 על ידי משפט הדדוקציה.

<u>הוכחה בדרך השלילה</u>

נתונה קבוצת פסוקים $A=\{\varphi1, \varphi2,\ldots, \varphi n\}$, ופסוק נוסף ψ. כדי להוכיח ש-ψ נובע מ- A, נביט על הקבוצה $\{\varphi1, \varphi2,\ldots, \varphi n, \neg\psi\}$ ונוכיח ממנה סתירה.

דוגמה

חזור שוב על ההוכחה שבדוגמה אחרי נסוח משפט השלמות, והפעם בצע הוכחה בדרך השלילה. נשים לב מהי השלילה של המסקנה:

$\psi= q\leftrightarrow s\equiv(q\wedge s) \vee ((\neg q) \wedge (\neg s))$, ולכן לפי צורה דיסיונקטיבית נורמלית של המשלים, נקבל: $\neg\psi \equiv (q\wedge(\neg s)) \vee ((\neg q) \wedge s)$. נשים לב כי זוהי שקילות גם כן כלומר הוכחנו כי
$\neg\psi \equiv (q\leftrightarrow (\neg s)) \equiv ((\neg q) \leftrightarrow s)$ נחזור שוב על התרגיל:

1. $p\to (q\leftrightarrow (\neg r))$
2. $p\wedge ((\neg s) \to r)$
3. $(p\wedge s) \to \neg r$

צ"ל $q\leftrightarrow s$
4.$q\leftrightarrow (\neg s)$ (PBC)
5. P, 2(23 פרוט)
6. $(\neg s) \to r$, 2(23פרוט)
7.$q\leftrightarrow (\neg r)$, 5,1(MP)
8. $p\to (s \to \neg r)$, 3, (export)
9. $s \to \neg r$, 5,8, (MP)
10. $(\neg r) \to s$, 6, (24=contraposition)
11. $q\to (\neg r)$, 7,(הגדרת השקילות)
12. $(\neg r)\to q$, 7,(הגדרת השקילות)
13. $q\to (\neg s)$, 4,(הגדרת השקילות)

14. $(\neg s)\to q$, 4,(הגדרת השקילות)

15. $s\to (\neg s)$,9,12,13 (transitivity)

16. $(\neg s) \to s$, 14,11,10 (transitivity)

17. $(\neg s) \leftrightarrow s$, 12,13, (הגדרת השקילות)

אבל זוהי סתירה כי פסוק לא יכול להיות שקול לשלילה של עצמו. לכן המסקנה המקורית נכונה.

17-3-2002-01

26-3-2002-03

<u>תרגיל בית מספר 14 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

פתור את המערכות שבתרגיל בית מספר 12 על ידי דרך השלילה.

<u>רזולוציה</u>

רזולוציה היא שיטת הוכחה של פסוק מתוך קבוצת פסוקים. צורה זו מתאימה לפסוקים שיש בהם אחודים ללא חתוכים של ± אטומים, כלומר פסוקים שאפשר להתיחס אליהם כאל מקרה מנוון של cnf, שבו אין חתוכים ויש רק קוניונקט אחד.

נמחיש את השיטה על ידי הדוגמה הבאה. נפתר את אותה בעיה בשתי שיטות שונות.

בעיה:

האם הבטוי הבא נכון? $\{(p\to q),(r \vee (\neg q)), \neg (p\wedge r)\} \vdash (\neg p)$

פתרון 1 הסתמכות על modus ponens

נעביר את כל הטענות ככל האפשר לצורה של גרירות, ונשתמש בחוקי ההיסק הקודמים. הטענה האמצעית נתנת לכתיבה בצורה:

$q\to r$. הטענה הימנית שקולה לפי חוקי דה מורגן ל- $(\neg r) \vee (\neg p)$, וזו שקולה ל- $r\to(\neg p)$. נקבל:

1. $p\to q$
2. $q\to r$
3. $r\to(\neg p)$

צ"ל $(\neg p)$
5. $p\to(\neg p)$, 1,2,3, (transitivity)
6. $(\neg p)\vee(\neg p)$, (27)
7. $(\neg p)$(7)

<u>כלל 30 עקרון הרזולוציה</u> $[(a\vee b)\wedge((\neg a)\vee c)]\to(b\vee c)$

הוכחה: נתרגם כל פסוק לצורה של גרירה.

הפסוק $(a\vee b)$ שקול לפסוק $(\neg b)\to a$.

הפסוק $((\neg a)\vee c)$ שקול לפסוק $a\to c$.

לכן הפסוק $[(a\vee b)\wedge((\neg a)\vee c)]$

שקול לפסוק $[((\neg b)\to a)\wedge(a\to c)]$ אשר לפי הטרנזיטיביות (כלל מספר 22) גורר את הכלל $(\neg b)\to c$ אשר שקול ל- $b\vee c$.

פתרון שני על סמך רזולוציה

נעביר כל אחת מהטענות לצורה קוניונקטיבית מנוונת ונקבל:

הטענה הראשונה שקולה ל- $(\neg p)\vee q$, השניה היא $r\vee(\neg q)$, והשלישית שקולה ל- $(\neg p)\vee(\neg r)$.

כעת נשתמש ברזולוציה . נכונות של שתי טענות גוררת את נכונות החתוך שלהן ולכן נובעת הטענה $[(r\vee(\neg q))\wedge((\neg p)\vee q)]$, ולפי רזולוציה נובעת הטענה $(\neg p)\vee r$. נשתמש במסקנה זו ובטענה השלישית $(\neg p)\vee(\neg r)$, ועל ידי רזולוציה נקבל את
$(\neg p)\vee(\neg p)$ אשר שקולה לטענה שצריך להוכיח לפי האידמפוטנטיות.

משפט

הטענה $\{\varphi 1, \varphi 2, \ldots, \varphi n, \} \vdash \psi$ שקולה לעובדה כי
$\varphi 1 \wedge \varphi 2 \wedge \ldots \wedge \varphi n \wedge (\neg\psi)$ היא סתירה. כלומר בתרגילים הבאים נוכיח
סתירה. נשים לב כי $p \wedge (\neg p)$ היא סתירה ומצד שני לפי חוקי הרזולוציה
טענה זו גוררת קבוצה ריקה. לכן נבין רזולוציה כך: נהפך את ההוכחה של
$\{\varphi 1, \varphi 2, \ldots, \varphi n, \} \vdash \psi$ לעובדה כי על ידי רזולוציה אפשר להגיע מהטענה
$\varphi 1 \wedge \varphi 2 \wedge \ldots \wedge \varphi n \wedge (\neg\psi)$ לקבוצה הריקה.

דוגמה

נתונות הטענות הבאות: $\varphi 0:[a \wedge b \wedge c] \rightarrow d$, $\varphi 1:[a \wedge b \wedge (\neg c)] \rightarrow d$
$\varphi 2:[a \wedge (\neg b) \wedge c] \rightarrow d$, $\varphi 3:[a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c)] \rightarrow d$,
$\varphi 4:[(\neg a) \wedge b \wedge c] \rightarrow d$, $\varphi 5:[(\neg a) \wedge b \wedge (\neg c)] \rightarrow d$
$\varphi 6:[(\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c] \rightarrow d$, $\varphi 7:[(\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c)] \rightarrow d$. הוכח מתוך
טענות אלו את הטענה d.

פתרון א- אינטואיטיבי:

כל טענה מתוך טענות אלו היא גרירה שבה הגורר הוא דיסיונקט. ב- 8 טענות
יש שמונה דיסיונקטים שונים, שעוברים על כל האפשרויות של כל
הדיסיונקטים ב- 3 משתנים. סך הכל נקבל אינטואיטיבית את הטענה $1 \rightarrow d$,
ולכן מתקבלת הטענה d.

פתרון ב- רזולוציה

נתרגם את $\varphi 0$, לפי הגדרת גרירה ל- $\neg[a \wedge b \wedge c] \vee d$, וטענה זו נתרגם לפי
חקי דה מורגן ל- $(\neg a) \vee (\neg b) \vee (\neg c) \vee d$. באותה צורה,
נתרגם את $\varphi 1$, לפי הגדרת גרירה ל-, וחקי דה מורגן ל
- $(\neg a) \vee (\neg b) \vee c \vee d$. נבצע רזולוציה ונסיק משתי טענות אלו את הטענה
$(\neg a) \vee (\neg b) \vee d$. כנ"ל מתוך $\varphi 2$ ו- $\varphi 3$ נסיק את הטענה
$(\neg a) \vee b \vee d$. נעשה רזולוציה לשתי המסקנות ונסיק את הטענה

$(\neg a) \vee d$. כעת נסיק מ- $\varphi 4$ - $\varphi 7$ את הטענה $a \vee d$. משתי הטענות נעשה
רזולוציה ונסיק את המסקנה d.

7-4-2002-02

<u>תרגיל בית מספר 15 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

א. נתונות הטענות: $\varphi1=p\wedge (r\leftrightarrow (\neg s))$, $\varphi2=p\rightarrow [q\wedge (s\rightarrow t)]$,
$\varphi3=(q\wedge r)\rightarrow (\neg t)$, $\psi =t\leftrightarrow (\neg r)$.

ב. נתונות הטענות הבאות: $\varphi1=p\rightarrow (q\wedge r\wedge s)$, $\varphi2= q\rightarrow (p\wedge r\wedge s)$,
$\varphi3=(r\wedge s)\rightarrow (\neg q)$, $\psi =(\neg p)$.

הוכח באמצעות רזולוציה כי $\{\varphi1, \varphi2, \varphi3\} \vdash \psi$.

רמז ל- א:

קודם נבטא את $\varphi1, \varphi2, \varphi3$ על ידי חתוך של אחודים של ± אטומים. למשל
לפי הגדרת שקילות $\varphi1=p\wedge (r\leftrightarrow (\neg s)) \equiv p\wedge (r\rightarrow (\neg s)) \wedge ((\neg s)\rightarrow r) \equiv$
$p\wedge ((\neg r) \vee (\neg s)) \wedge(r \vee s)$

בזאת בטאנו את $\varphi1$ כחתוך של אחודים של ± אטומים. זו כמעט צורה קוניונקטיבית נורמלית, למעט העובדה ש- לא כל ± אטום מופיע בכל קוניונקט. למשל הקוניונקט הראשון מכיל רק את האטום p אך לא את שאר האטומים r,s,t.

<u>אי תלות של פסוק בקבוצת פסוקים</u>

נתונה מערכת פסוקים $A=\{\varphi1, \varphi2,\ldots, \varphi n\}$, ופסוק נוסף ψ.
נגיד כי הפסוק בלתי תלוי במערכת, אם:

הגדרה תחבירית (סינטקטית): אי אפשר מתוך המערכת A להוכיח את ψ, וגם אי אפשר להוכיח את $\neg\psi$.

הגדרה משמעותית (סימנטית): קימת שורה בטבלת האמת (קים מודל) שבה כל הטענות שב- A נכונות וגם ψ נכונה, וקימת שורה אחרת (מודל אחר) שבה כל הטענות שב- A נכונות וגם $\neg\psi$ נכונה.

נסוח אחר: הטענה $(\varphi_1\wedge \varphi_2\wedge\ldots\wedge \varphi_n)\to\psi$ איננה טאוטולוגיה ו הטענה $(\varphi_1\wedge \varphi_2\wedge\ldots\wedge \varphi_n)\to \neg\psi$ איננה טאוטולוגיה. נסוח סמנטי: לשתי הטענות הללו יש אפסים בטבלת האמת.

תלות: בכל מקרה אחר נגיד כי ψ תלויה ב- A. במקרה זה אפשר להוכיח את ψ, או אפשר להוכיח את $\neg\psi$ מ- A. במקרה זה בכל שורה בטבלת האמת (כל מודל) של A, שנותנת ערך 1 לכל טענה של A, יהיה ערך אמת קבוע בטענה ψ. אם ערך האמת הוא 1 , אז ניתן להוכיח את ψ, ואם ערך האמת הוא 0 , אז ניתן להוכיח את $\neg\psi$. נסוח סימנטי אחר. הטענה $(\varphi_1\wedge \varphi_2\wedge\ldots\wedge \varphi_n)\to\psi$ היא טאוטולוגיה או הטענה $(\varphi_1\wedge \varphi_2\wedge\ldots\wedge \varphi_n)\to \neg\psi$ היא טאוטולוגיה.

דוגמה

לגבי הקבוצה הבאה A והטענה הבאה ψ, בדוק בדיקה משמעותית (סימנטית) האם ψ תלויה או לא ב- A. באם היא תלויה הוכח את ψ או את $\neg\psi$ על ידי הוכחה תחבירית (סינטקטית) מתוך A.

$$\varphi_1=a\to (b\wedge c),\ \varphi_2= c\to (b\wedge (\neg a)),\ \psi =a,\ A=\{ \varphi_1, \varphi_2\}$$

תשובה: נכין טבלת אמת על שלשה אטומים:

A	B	C	$\neg a$	$b\wedge c$	φ_1	$B\wedge(\neg a$	φ_2
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0

הטענות φ_1, φ_2 נכונות רק בשורות 1,3,4 . האם יש סימן קבוע ל- a בשורות אלו? הוא אכן שלילי. לכן $\neg a$ חיובי בשורות אלו, ולכן מתוך φ_1, φ_2 נובעת הטענה $\neg a$. לכן a תלויה בקבוצה A.

כעת נחפש הוכחה פורמלית, תחבירית (סינטקטית) לעובדה

.$\{a\to (b\wedge c), c\to (b\wedge (\neg a))\} \vdash \neg a$

הוכחה פורמלית (בדרך השלילה)

1. $a\to (b\wedge c)$.
2. $c\to (b\wedge (\neg a))$.

צ"ל $\neg a$

3. a, (PBC)
4. $b\wedge c$, 3,1,(MP)
5. b, 4, (23= perut)
6. c, 4, (23= perut)
7. $b\wedge(\neg a)$, 6,2 (MP)
8. $(\neg a)$, 7, (23= perut)
9. $a\wedge (\neg a)$, 8,3 contradiction

הוכחה פורמלית על ידי רזולוציה:

נתרגם את $\varphi1, \varphi2$ כל אחד לחתוך של אחודים של ליטרלים (± אטומים).

$\varphi1\equiv a\to (b\wedge c) \equiv (\neg a)\vee (b\wedge c) \equiv [(\neg a)\vee b] \wedge [(\neg a)\vee c]$

$\varphi2\equiv c\to (b\wedge (\neg a))\equiv (\neg c)\vee (b\wedge (\neg a)) \equiv [(\neg c)\vee b] \wedge [(\neg c)\vee (\neg a)]$

כעת על סמך רזולוציה:

$[(\neg a)\vee c]\wedge [(\neg c)\vee (\neg a)] \Rightarrow(\neg a)$

<u>תרגיל בית מספר 16 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

עבור $\varphi1=(a\to b) \to(c\wedge d), \varphi2= (b\wedge c) \to a, A=\{ \varphi1, \varphi2\}$

חזור על הדוגמה הקודמת עבור 8 ψ ים שונים:

$\psi = a$, $\psi = b$, $\psi = c$, $\psi = d$, $\psi = b \rightarrow a$, $\psi = b \rightarrow c$, $\psi = (b \wedge c) \rightarrow a$,
$\psi = b \rightarrow d$

<u>תחשיב היחסים- (פרדיקטים).</u>

נביט בטעון הבא:

כל תלמיד אוהב מבחנים קלים. קרעכצען הוא תלמיד. לכן קרעכצען אוהב מבחנים קלים.

ברור לנו אינטואיטיבית כי הטעון הוא טעון תקף, וכי נעשה כאן שמוש במודוס פוננס, אבל פורמלית, כדי להשתמש במודוס פוננס, עלינו להשתמש בכלל :
אם קרעכצען הוא תלמיד אז הוא אוהב מבחנים קלים. אין לנו כזו צורת מעבר בתחשיב הפסוקים, ולכן אנו צריכים ללמוד את תחשיב היחסים- פרדיקטים.

<u>הכמתים לכל x $\forall$ וקים x $\exists$</u>

בתחשיב היחסים ישנם שני כמתים חדשים לכל x המסומן על ידי $\forall$_וקים x המסומן על ידי $\exists$. הכמתים הללו ניתן להביט עליהם כעל קשרים עם תכונות מיוחדות. כל כמת יחשב כקשר בעל צאצא יחיד.

10-4-2002-03
נחזור אל הדוגמה הקודמת. נסמן ב- סימון T_x את התכונה ש- x הוא תלמיד, ב- M_x את התכונה ש-x אוהב מבחנים קלים, ובאות k את הבן אדם ששמו קרעכצען. אז הטעון: כל תלמיד אוהב מבחנים קלים. קרעכצען הוא תלמיד. לכן קרעכצען אוהב מבחנים קלים, ירשם כך:

1.$\forall x,(T_x \rightarrow M_x)$.
2.T_k.

3.M_k.

נשים לב כי הבטוי T_x הוא יחס (חד מקומי) על כל העצמים האפשריים, ומבדיל בין כל העצמים סתם (העולם), ובין כל העצמים שהם תלמידים.
באותה צורה M_x הוא יחס חד מקומי על העולם, ומסמן את כל העצמים שהם אוהבי מבחנים קלים.

דוגמה

כל הבנים הם חזקים. כל הבנות הן יפות. כל ח זק אוהב כל יפָה. לכן כל בן אוהב כל בת.

נביט על טעון זה, ונרשום אותו בסימונים. קודם כל נסמן את כל היחסים אותם שמים בעולם שלנו:

B_x מסמן כי x הוא בן. G_x מסמן כי x היא בת. H_x מסמן כי x הוא ח זק. Y_x מסמן כי x היא יפה. כל הללו הם יחסים חד מקומיים על העולם. $O_{x,y}$ מסמן כי x אוהב את y. הטעון שלנו נראה כך:

1.$\forall x,(B_x \rightarrow H_x)$.
2. $\forall x,(G_x \rightarrow Y_x)$.
3. $\forall x \forall y,((H_x \wedge Y_y) \rightarrow O_{x,y})$.

---

4. $\forall x \forall y,((B_x \wedge G_y) \rightarrow O_{x,y})$.

<u>תרגיל בית מספר 17 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

הבט בקובץ של סמי אוסף תרגילים מספר 2 תרגיל מספר 1 ופתר את כל הסעיפים המתחלקים ב- 3 .

7-4-2002-01

נשים לב מה מכיל פסוק. הוא מכיל את הטענות האטומיות כמקודם, (כמו למשל – היום יום ראשון), את כל הקשרים הרגילים כמקודם, כמו אחוד, חתוך וכדומה, (ולכן בעצם כל פסוק של תחשיב

הפסוקים). בנוסף ישנם הכמתים החדשים: לכל x וקים x, וטענות התלויות במשתנים. הללו הם יחסים חד משתנים- למשל- x הוא תלמיד, דו משתניים, למשל x אוהב את y, תלת משתניים, למשל x הוא האב, y היא האם של z, וכדומה, יחסים רב משתניים. כמו כן יתכנו קבועים, למשל בן אדם ששמו קרעכצען, מספר ששמו – 0 , וכדומה.

<u>מודלים אפשריים לפסוקים</u>

נביט בפסוק: אם יורד גשם אז מעונן. נסמן יורד גשם= p, מעונן= q, אז הפסוק הופך להיות $p \rightarrow q$. כעת נביט בפסוק: אם היום יום ראשון, אז היום

יום שני. נסמן היום יום ראשון= p, היום יום שני= q, אז הפסוק הופך להיות $p \rightarrow q$. לשני הפסוקים השונים הללו (ושונים בערכי האמת שלהם), יש אותו סימון: $p \rightarrow q$. מתוך הסימון אי אפשר לשחזר את הפסוק המקורי, וישנם ∞ פסוקים בעלי אותו סימון.

נביט שוב בטעון הקודם: כל תלמיד אוהב מבחנים קלים. קרעכצען הוא תלמיד. לכן קרעכצען אוהב מבחנים קלים. ונזכר בסימון שלו:

$1. \forall x, (T_x \rightarrow M_x).$

$2. T_k.$

$3. M_k.$

כל מי שלומד תורה אוהב מצוות, קיש לומד תורה, ולכן אוהב מצוות. נסמן ב T_x את התכונה ש- x לומד תורה, ב- M_x את התכונה ש-x אוהב מצוות, ובאות k את הבן אדם ששמו קיש. אז הטעון הקודם ירשם על ידי אותו סימון. אין דרך מתוך הסימון לברר מיהו הטעון המקורי.

דוגמה

נביט בטענה הבאה: $\forall x(\forall y(K(x,y) \rightarrow (X(y) \wedge N(x))))$.
רואים כי הטענה נטענת אודות עולם שיש בו שלשה יחסים: יחס דו מקומי K ושני יחסים חד מקומיים X ו – N . טענה זו אפשר לטעון בכל עולם שכזה.

נביט בעולם הבא: תחום המספרים הטבעיים, היחס $K(x,y)$ פרושו ש- x קטן מ- y, היחס $X(y)$ אומר כי האבר y הוא גדול ביותר (מקסימלי) והיחס $N(x)$ אומר כי x קטן ביותר, מינימלי. ברור כי הטענה איננה נכונה בעולם זה, כיון ש- למשל עבור $x=2, y=3$ היחס $K(2,3)$ הוא יחס נכון, אך לעומת זאת היחסים $X(3)$ ו- $N(2)$ לא נכונים.

נביט בעולם הבא: כעת המספרים שלנו הם 1,2,3 עם יחס הסדר הרגיל. כעת הטענה עבור $x=1,y=3$ נכונה, אבל עבור $x=1,y=2$ היא אינה נכונה.

נביט בעולם הבא: כעת המספרים שלנו הם 1,2 עם יחס הסדר הרגיל. כעת הטענה עבור $x=1,y=2$ נכונה, ואלו כל הזוגות שבהם גם K , גם X וגם N נכונות . עבור $x=y=1$ ועבור $x=y=2$ גם מה שלפני החץ וגם מה שאחרי החץ אינו נכון.

מצאנו שלשה עולמות שונים, שבהם ליחסים K , X ו- N היתה אותה משמעות, אבל לטענה היה ערך אמת 0 בשנים מהמודלים וערך אמת 1 במודל אחר.

נביט בעוד מודל, שבו ל- K , X ו- N יש משמעויות שונות לגמרי:
K(x,y) אומר כי x אוהב את y , X(x) אומר כי הוא גבר ו- N(y) אומר כי y היא אשה. ישנן חברות שבהן רק נשים אוהבות גברים, וישנן חברות שבהן הטענה לא נכונה.

נסכם: בהנתן טענה או אסף של טענות, אפשר לבנות הרבה עולמות המתיחסים לאותן טענות, ואשר יתכנו לטענות ערכי אמת שונים במודלים השונים הללו.

<u>תרגיל בית מספר 18 להגשה בכתב עוד שבוע</u>
הבט על אסף התרגילים מספר שנים של סמי ועשה את תרגיל 4

14-4-2002-02

24-4-2002-03
<u>תחום ההשפעה של כמת: עץ של פסוק. הופעה חפשית או תלויה של משתנה.</u>

כשאנו מביטים על פסוק בתחשיב היחסים, אפשר לרשום אותו כעץ רגיל, כאשר הכמתים החדשים, $\forall x$ ו- $\exists x$, הם צמתים בעלי צאצא יחיד. בכתיב רגיל, הסוגרים הנפתחים לאחר הכמת הם הבטוי של תת העץ שהשרש שלו הוא הכמת. תת פסוק זה נקרא תחום ההשפעה של הכמת. כל הופעה של המשתנה x אשר נמצאת בתחום ההשפעה של איזשהו כמת נקראת הופעה קשורה. כל הופעה שאיננה קשורה נקראת חפשית.

דוגמה

נביט בבטוי $[\forall x(\exists y([K(x,y) \wedge A(x)] \rightarrow B(y)))] \wedge (C(y) \wedge D(x))$
ונציר אותו כעץ. השרש של העץ הוא החתוך, ולחתוך זה יש שני צאצאים, חתוך והכמת לכל. נקבל:

			∧		
		/		\	
		$\forall x$		∧	
		$\mid$	C(y)		D(x)
		$\exists y$			
		$\mid$			
		$\rightarrow$			
	/		\		
	∧			B(y)	
K(x,y)		A(x)			

אז, תחום ההשפעה של הכמת לכל x הוא הפסוק
$(\exists y([K(x,y) \wedge A(x)] \rightarrow B(y)))$, ותחום ההשפעה של הכמת קים y הוא
הפסוק $([K(x,y) \wedge A(x)] \rightarrow B(y))$.

<u>תרגיל בית מספר 19 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

עבור כל אחד מהבטויים הבאים, ציר אותו בצורת עץ. עבור כל כמת בכל פסוק, רשום את תחום ההשפעה של הכמת.

$$[\forall x\{E(x) \leftrightarrow (\exists y(F(y) \wedge[\forall z(G(z) \rightarrow B(y))] \vee C(y)))\wedge D(x)\}]$$

$$[\forall x\{\forall y (\forall z[A(x,y) \leftrightarrow (F(y,z))] \wedge[\exists w (G(x,y,z,w)])\}]$$

<u>הצבות חוקיות</u>

נתונה טענה $A(x)$. נציב במקום המשתנה x את הבטוי t. ההצבה $A(t)$ היא חוקית אם t הוא קבוע, או אם t הוא משתנה כך ש- הצבתו משאירה את כל ההופעות החפשיות שלו- חפשיות.

דוגמה

נביט בטענה הבאה:

$$[\forall x(\exists y([K(x,y) \wedge A(x)] \rightarrow B(y)))] \wedge (C(y) \wedge D(z))$$

האם במקום x מותר להציב y ? כל ההופעות של x אינן חפשיות, והצבת y במקום x אינה מקלקלת. ההופעה היחידה של y שהיא חפשית נמצאת בבטוי $C(y)$ והיא לא תפסיד את החפשיות שלה. לכן ההצבה הזו חוקית.

האם במקום y מותר להציב x ? לא, כי בבטוי $B(y)$ יש y חפשי, שיהפך לאחר הצבתו כ- x ללא חפשי.

<u>הגדרה שקולה</u>

בקצור עלינו למצוא בתחום ההשפעה של משתנה x משתנה y שהוא חפשי. אז הצבת המשתנה x במקום y אסורה.

כל הצבה אחרת, כולל משתנים אחרים או קבועים היא חוקית.

<u>תרגיל בית מספר 20 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

הבט על הטענות שבתרגיל 19 ומצא האם יש שם הצבות בלתי חוקיות.

14-4-2002-01

<u>הוכחות משפטים מתוך משפטים</u>

בתחשיב היחסים, ניתן להוכיח משפטים מתוך משפטים אחרים. כל חוקי הלוגיקה של תחשיב הפסוקים תקפים, ובנוסף קימים עוד ארבעה חוקים, אשר

מאפשרים להוסיף או להוריד כמת מפסוק. סך הכל 2×2 חוקים. נעבר על ארבעה חוקים אלו, UG, US, EG, EP.

$US(x/t): \quad \forall x(A(x)) \vdash A(t)$

בתנאי ש-t הוא שם עצם כלשהוא בשפה, או משתנה כך שההצבה של t במקום x בטענה A(x) היא חוקית.

<u>דוגמה לשמוש לא נכון בכלל US.</u>

נתונה הטענה $\forall x\,[\exists y\,(K(x,y))]$. אז בסימונים הקודמים, $A(x)\equiv[\exists y\,(K(x,y))]$. בטענה זו x חפשי ו- y איננו חפשי. אם נציב y במקום x אז בטענה $A(x/y)\equiv[\exists y\,(K(y,y))]$ אבדנו הופעה חפשית של x .

$UG: \quad A(t) \vdash \forall x(A(x))$

בתנאי ש-t הוא משתנה חפשי

$EG: \quad A(b) \vdash \exists x(A(x))$

בתנאי ש-b הוא קבוע בשפה.

$EP: \quad \exists x(A(x)) \vdash A(c)$

בתנאי ש-c הוא קבוע כלשהוא חדש בשפה.

דוגמה

(האוסף של סמי – קבץ מספר 3 – תרגיל 2 – סעיף ג)

הוכח

$\{A_k, \forall x[(C_x\vee\neg D_x)\rightarrow B_x], \forall x[A_x\rightarrow(\neg B_x)]\} \vdash (\neg C_k)\wedge D_k$

נשים לב כי מה שצריך להוכיח הוא השלילה של מה שלפני הגרירה בטענה השניה.

נרשם כך:

1. A_k
2. $\forall x[(C_x\vee\neg D_x)\rightarrow B_x]$
3. $\forall x[A_x\rightarrow(\neg B_x)]$

צריך להוכיח $(\neg C_k) \wedge D_k$

4. $A_k \rightarrow (\neg B_k)$ (3, US(x/k))
5. $\neg B_k$ (1,4 MP)
6. $(C_k \vee \neg D_k) \rightarrow B_k$ (2,US(x/k))
7. $(\neg B_k) \rightarrow (\neg (C_k \vee \neg D_k))$, (6, contrapositia),
8. $\neg (C_k \vee \neg D_k)$,(5,7,MP),
9. $(\neg C_k) \wedge D_k$, (De Morgan).

דוגמה

(האוסף של סמי - קבץ מספר 3 - תרגיל 3 - סעיף ט)

הוכח:

1. $\forall x\, [P_x \rightarrow (\forall y\, [Q_y \leftrightarrow (\neg R_{x,y})])]$.
2. $\exists x\, [P_x \wedge (\forall y\, [(\neg S_y) \rightarrow R_{x,y}])]$.
3. $\forall x (\forall y\, [(P_x \wedge S_y) \rightarrow (\neg R_{x,y})])$.

צ"ל

$\forall x\, [Q_x \leftrightarrow S_x]$.

הוכחה

4. $P_a \wedge (\forall y\, [(\neg S_y) \rightarrow R_{a,y}])$, (2,EP(x/a)),
5. P_a, (4. Perut),
6. $\forall y\, [(\neg S_y) \rightarrow R_{a,y}]$, (4, perut),
7. $P_a \rightarrow (\forall y\, [Q_y \leftrightarrow (\neg R_{a,y})])$, (1,US(x/a)),
8. $\forall y\, [Q_y \leftrightarrow (\neg R_{a,y})]$, (5,7,MP),
9. $\forall y\, [(P_a \wedge S_y) \rightarrow (\neg R_{a,y})]$, (3, US(X/a)),
10. $(\neg S_y) \rightarrow R_{a,y}$, (6, US(y/y)),
11. $Q_y \leftrightarrow (\neg R_{a,y})$, (8, US(y/y)),
12. $(P_a \wedge S_y) \rightarrow (\neg R_{a,y})$, (9, US(y/y)),
13. $P_a \rightarrow (S_y \rightarrow (\neg R_{a,y}))$, (12, exportatia),
14. $S_y \rightarrow (\neg R_{a,y})$, (5,13,MP),
15. $(\neg R_{a,y}) \rightarrow S_y$, (10, contrapositia),

16. $((\neg R_{a,y}) \rightarrow S_y) \wedge (S_y \rightarrow (\neg R_{a,y}))$, (14,15),
17. $(\neg R_{a,y}) \leftrightarrow S_y$, (16,הגדרת השקילות)
18. $(Q_y \leftrightarrow (\neg R_{a,y})) \wedge ((\neg R_{a,y}) \leftrightarrow S_y)$, (11,17),
19. $Q_y \leftrightarrow S_y$, (18, double transitivity),
20. $Q_x \leftrightarrow S_x$, (19, US(y/x)),
21. $\forall x\ (Q_x \leftrightarrow S_x)$, (20, UG).

<u>קיום טעון תקף, היות פסוק יכיח.</u>

21-4-2002-01-02

1-5-2002-03

נתונים קבוצה A של פסוקים ופסוק ψ. הפסוק ניתן להוכחה מהקבוצה A , (יכיח) אם ניתן להגיע לסתירה מהמערכת $A\cup(\neg\psi)$. הוא בלתי ניתן להוכחה, אם אי אפשר להגיע לסתירה מהמערכת $A\cup(\neg\psi)$, כלומר יש לה מודל.

דוגמה

האסף של סמי, קבץ מספר 3 , תרגיל 3 , סעיף א.

בדוק האם הטעון תקף:

1. $\forall x\ [A_x \rightarrow C_x]$.
2. $\forall x\ [B_x \rightarrow D_x]$.
3. $\exists x\ A_x$.
4. $\exists x\ (\neg D_x)$.

מסקנה:

$\exists x\ (C_x \wedge (\neg B_x))$

פתרון:

5. A_k, (3, EP(x/k)),
6. $A_k \rightarrow C_k$, (1, US(x/k)),
7. C_k, (5,6, MP),
8. $(\neg D_m)$, (4,EP(x/m)),
9. $B_m \rightarrow D_m$, (2, US(x/m)),
10. $(\neg D_m) \rightarrow (\neg B_m)$, (9, contrapositia),
11. $(\neg B_m)$, (8,10,MP).

נצלנו את כל הנתונים ולא מצאנו שחיב להיות איבר שכן מקים את C ולא את B .

נביט על השלילה של המסקנה.

$\neg[\exists x\ (C_x \wedge (\neg B_x))] \equiv \forall x\ ((\neg C_x) \vee B_x) \equiv \forall x\ (C_x \rightarrow B_x).$

וכעת ננסה את המודל שיצא.

העולם שלנו מכיל רק שני איברים, ולכן U={k,m}. נביט על כל אבר מהעולם, לאיזה יחס הוא חיב להשתיך.

האבר k חיב להשתיך ל A ו- ל- C. מותר לו להשתיך ל- B , ואז יהיה חיב להשתיך ל- D , מותר לו לא להשתיך ל- D ואז הוא לא ישתיך ל- B, ומותר לו
לא להיות ב- B אך כן ב- D. מתוך שלש האפשרויות הללו יש לפסול את שתי האחרונות, כיון ש- אז האבר k יקים את המסקנה:
כן יקים את C ולא את B . לכן האיבר k חיב לקים את כל היחסים.

באותה צורה האיבר m אינו מקים את B ואת D. אם הוא כן יקים את C אז הוא יהיה דוגמה של איבר המקים את המסקנה. לכן הוא לא מקים את C ולכן גם לא את A . לכן המודל הרצוי הוא:

, A=C=B=D={k }.

מודל זה מקים את 1,2,3,4 ואת ההפוכה של המסקנה.

28-4-2002-02

<u>תרגיל בית מספר 21 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

האסף של סמי, קבץ מספר 3 , תרגיל 3 , כל הזוגיים.

<u>קבוצה ספיקה של פסוקים, מודל.</u>

נתונה קבוצה A של פסוקים. או שאפשר להוכיח ממנה סתירה (ואז היא נקראת בלתי ספיקה), ואז אין מודל המקים אותה, או שאי אפשר להוכיח ממנה סתירה, אז היא נקראת ספיקה, ואז יש מודל המקים אותה.

דוגמה

אסף של סמי, קבץ מספר 4, תרגיל 3 , סעיף ב.

בדק אם מערכת הפסוקים ספיקה או לא. אם כן מצא מודל, אם לא, הוכח סתירה.

הוכח:

1. $\forall x\ [D_x \rightarrow (\neg E_x)]$.
2. $\forall x\ [F_x \rightarrow (E_x \vee (\neg D_x))]$.
3. $\exists x\ [D_x \wedge F_x]$.

---

4. $D_a \wedge F_a$, (3, EP(x/a)),
5. D_a, (4, perut),
6. F_a, (4, perut),
7. $F_a \rightarrow (E_a \vee (\neg D_a))$, (2,US(x/a)),
8. $E_a \vee (\neg D_a)$, (6,7, MP),
9. $D_a \rightarrow E_a$, (8, 27),
10. E_a, (5,9,MP),
11. $D_a \rightarrow (\neg E_a)$, (1, US(x/a)),
12. $(\neg E_a)$, (5,11, MP),
13. $E_a \wedge (\neg E_a)$, (10,12).

וסתירה.
דוגמה

אסף של סמי, קבץ מספר 4, תרגיל 3 , סעיף א.

בדק אם מערכת הפסוקים ספיקה או לא. אם כן מצא מודל, אם לא, הוכח סתירה.

הוכח:

1. $\forall x\ [A_x \rightarrow C_x]$.
2. $\forall x\ [B_x \rightarrow C_x]$.
3. $\exists x\ [A_x \wedge (\neg B_x)]$.

---

4. $A_k \wedge (\neg B_k)$, (3, US(x/k)),
5. A_k, (4, perut),
6. $(\neg B_k)$, (4, perut),

7. $A_k \rightarrow C_k$,   (1, US(x/k)),

8. C_k,   (5,7, MP),

לא נצליח להסיק דבר מה מ- 2 , כיון ש-B_k לא נתון. לכן ננסה למצא מודל. כל מודל צריך לקים את תכונות 1-8 . כלומר צריך להיות איבר פרטי k אשר מקים את תכונות, A , C אך לא את תכונה B . כמו כן כל אבר המקים את A צריך לקים את C , וכל אחד המקים את B צריך לקים את C . ננסה להשתמש רק באותו אבר מיוחד:

$U=A=C=\{k\}, B=\emptyset$.

מודל זה מקים את כל הדרוש, כיון ש- כל אבר של A הוא גם אבר של C , כל אבר של B הוא גם אבר של C , ויש אבר (k) הנמצא ב- A אך לא ב- C .

<u>תרגיל בית מספר 22 להגשה בכתב עוד שבוע</u>

האסף של סמי, קבץ מספר 4 , תרגיל 3 , ג- י.