

הקורס לוגיקה ותכנות לוגי- חלק ב

מורה: גיורא דולה. מכללת נתניה סמסטר אביב התשס"ב

מבוא לשפת התכנות `PRO gramming in LOG ic`.

כתובת אינטרנט ממנה נתן להוריד פרולוג מעדכן:

www.swi-prolog.org

הגרסה המעודכנת ביותר היא 5.0.5. אפשר להתקין אותה גם בסביבת חלונות וגם בסביבת `unix-lenox`. בעזרת השם (והטכנאים) היא תהיה מותקנת על המחשב שממנו אלמד קורס זה בכתה. במעבדות שבמכללה נכון להיום ישנה גרסה ישנה יותר, 4.0.6. הגרסה אמורה להתעדכן ברשת המעבדות אחרי סוף הסמסטר.

הפרולוג היא שפה המשמשת שפת תכנות בבינה מלאכותית.

היא מבוססת על מאגרי נתונים שעליהם מגדירים יחסים. בכך היא מהווה המשך ישיר לקורס לוגיקה ולתחשיב היחסים.

תכונה של השפה שיש בה יתרון וחסרון: הכתיב הלוגי מאפשר קדוד קצר של תכניות. ביחוד, לולאות נכתבות בצורה פשוטה מאד.

קבועים, משתנים, יחסים ועולם.

כל צרוף אותיות המתחיל באות לטינית קטנה הוא קבוע. דוגמאות:
`john, betti, krechtzen, giora, jOHN`

כל צרוף אותיות המתחיל באות לטינית גדולה הוא משתנה. למשל:
`X, X1, Xy, Y,`

כל צרוף אותיות שמיד אחריו נפתחות (ונסגרות) סוגרים הוא יחס. יש יחסים חד, דו, תלת, ... מקומיים. דוגמאות:

`gadol(X), katan(X), ohev(X,Y), soneh(X,Y), horim(X,Y,Z),`
העולם מרכב אוסף כל הקבועים הנזכרים בתכנית, ובנוסף כל המספרים.

כל משפט בתכנית Prolog חיב להסתים בנקודה.

הסימן % מסמן הערה שאיננה עוברת הדור (compilation). כלומר, מה שרשום אחרי הסימן איננו חלק ממאגר הנתונים או היחסים של התכנית.

טעינת תכנית (הדור – קומפילציה)

כל קבץ המכיל נתונים ויחסים לפרולוג, חייב להסתים בסימון
.pl למשל kovetz.pl

כדי להכין את הקבץ למצב שאילתות, יש לגרור (כל ההסבר הוא בסביבת חלונות) את ה icon של הקבץ לתוך זה של swi-prolog. מתבצעים טעינה והדור אוטומטיים, ונפתח חלון שבו מופיעות הודעות אודות תהליך ההדור (כולל הודעות אודות שגיאות תחביר syntax) ובהנחה שההדור עבר בשלום, מופיע בשורה האחרונה סימן שאלה, מימנו מקף ומימינו הסמן cursor. אפשר לשאול שאילתות.

■-?

אופציה אחרת. מקישים הקשה כפולה על ה icon של הקבץ, והוא טוען את המהדר, עובר הדור, ופותח את חלון השאילתות.

הרצת שאילתות אודות העולם.

לאחר שנכתבה תכנית פרולוג, והעלתה למחשב, כלומר, בוצע בה תהליך קומפילציה והעלאה לזכרון, המחשב הופך למקור שממנו אפשר לשאול שאילתות אודות העולם של התכנית.

כל שאילתה מסתימת בנקודה ואחריה הקשת enter.

כשנשאלה שאילתה המחשב מבצע סריקה בתוך המאגר שרשום בתכנית ועונה על השאילתה. לאחר מכן הוא מדפיס סימן שאלה חדש ומוכן לשאילתה חדשה.

דוגמאות לתכניות ולשאילתות:

נתונה התכנית (source) פרולוג הבאה. zair.pl

-----תחילת התכנית--

katan(1,2).

katan(2,3).

kat(X,Y):-katan(X,Z), katan(Z,Y).

-----סוף התכנית-----

העולם של המאגר (התכנית) מכיל שלשה איברים. מספרים 1 ו-2 ו-3. יש בו שני יחסים דו מקומיים. היחס katan שהוגדר על שני זוגות, והיחס kat שהגדר בצורה שעוד מעט נחשוב עליה.

נניח שנשאל את השאילתה:

?-katan(1,2). (enter)

המחשב מתחיל לסרוק את קבץ המקור שורה שורה מהתחלה לסוף, ומשנה את שרשרת השאילתה לשרשרות הנתונים. במקרה זה שרשרת השאילתה זהה לנתון הראשון, והמחשב מוצא זאת. לכן תשובת המחשב היא:

yes.

?- ■

נניח שנשאל את השאילתה:

?-katan(2,3). (enter)

שוב יסרק המחשב את הנתונים מלמעלה למטה ויעצור מול הנתון הראשון. השרשרת katan(זהה בין השאילתה ובין הנתון הראשון, אבל האיבר 2 שבשאילתה שונה מהאיבר 1 שבנתון. לכן ההשוואה בין השאילתה ובין הנתון הראשון נכשלת. המחשב מנסה כעת את ההשוואה בין השאילתה ובין הנתון השני מצליח ועונה yes. אם ננסה כעת את השאילתה ?-katan(1,1). (enter). הפעם השרשרת לא שווה לאף אחת מ-3 שורות הקלט, והמחשב יענה:

no.

?- ■

תשובה זו אומרת כי עד סוף נתוני הקלט, אין נתון אשר מתאים לשאילתה.

28-4-2002-01

האחדה- unification

כאשר נשאלת שאילתה, המחשב מתחיל לסרוק את בסיס הנתונים שבתכנית מלמעלה למטה, ומשוה את שרשרת האותיות אחת אחת עם שרשרת האותיות של שורת הנתונים הנבדקת. אם יש שוני אפילו באות אחת, מוכרז כשלון, והמחשב עובר להשוות את השאילתה עם שורת הנתונים הבאה.

נניח שהשאילתה כללה יחס. מושווה שם היחס בשאילתה עם שם היחס של הנתון. כשעוברים בשלום את ההשוואה הזו, המחשב משווה את מספר המקומות של יחס השאילתה עם מספר המקומות של יחס הנתון. (כלומר האם שני היחסים הם למשל תלת מקומיים). (דבר זה קרוי בלעז airity). אם הללו לא זהים, אז מוכרז כשלון.

למשל נניח שהשאילתה היא:

?-katan(1). (enter)

המחשב מצהיר על כשלון, כיון שה- airity של היחס בשאילתה הוא 1, ואין אף יחס בעל תכונה זו, ואפילו שיש יחס בעל אותו שם ובעל airity 2. רק מקבלים הערה על האפשרות שיש katan/2 (היחס ומספר המשתנים שלו), אבל עדין מוכרזת שגיאה.

8-5-2002-03

השמה של קבוע במשתנה

כשיש שאילתה, והשווה היחס, והשווה ה- arity והכל עבר בשלום, מתחילים להשוות את שמות הפרמטרים בתוך היחס. קבוע מול קבוע חייב להזדהות, אך לעומת זאת, קבוע מול משתנה, מתבצעת השמה, והערך של הקבוע מושם בתוך המשתנה.

דוגמה:

?-katan(1,X). (enter)

המחשב משובה מול השורה הראשונה, מצליח ומבצע השמה $X=2$. זו גם התשובה של המחשב: אבל אם לוחצים (enter) הוא ממשיך ועונה yes ומוכן לשאילתה חדשה עם סימן שאלה חדש.

משמעות השאילתה הקודמת. האם קים נתון X מהעולם שלנו כך שעבורו היחס מתקיים?

שאילתות עם תשובות מרובות.

נניח שוב כי שאלנו (enter). $\text{katan}(1,X)$? וקבלנו את אותה תשובת השמה $X=2$. קימת אפשרות לתקתק למחשב את השרשרת (enter); פרושה: סחתין, ידוע ש 2 היא תשובה אפשרית, האם יש תשובה אפשרית אחרת? או: לאחר שמצאת הצלחה לשאילתה, המשך את חיפושך מאותו מקום, ועצור בהצלחה הבאה. במקרה פרטי זה נקבל

$X=2$;

.no

?- ■

כלומר אין הצלחה נוספת בנוסף לראשונה. דוגמאות להצלחה נוספת נראה בתכנית הבאה.

קודם נבין את השורה השלישית של התכנית הזו: השורה:

$\text{kat}(X,Y):-\text{katan}(X,Z), \text{katan}(Z,Y)$.

נכתבת בלוגיקה רגילה כך:

$[\text{kat}(X,Y)] \leftrightarrow [\exists Z(\text{katan}(X,Z) \wedge \text{katan}(Z,Y))]$.

פרושה: אנו מגדירים יחס חדש דו מקומי ($\text{airity}=2$) ושמנו kat . כדי שהיחס יתקיים, צריך להתקיים אבר אחד לפחות Z כך ש- מתקיים צד ימין.

נניח כי אנו שואלים את השאילתה:

?- $\text{kat}(1,2)$. (enter)

המחשב מתחיל להשוות בין שרשרת השאלה ובין נתוני התכנית. לא מצליח בשורות הראשונה והשניה- כיון שאין את אותו שם יחס, ונעצר מול השורה השלישית. ישנו אותו שם יחס, $\text{arity}/2$, ולכן המחשב מנסה להתאים בין הפרמטרים של היחס. כיון שיש כאן משתנים מול קבועים, מתבצעת השמה: $X=1, Y=2$.

כעת נפתחת אוטומטית לולאה (עקב זה- לולאות נכתבות בפרולוג בכתיב בעל אורך מאד קצר), והלולאה היא בעצם שאילתה פנימית שהמחשב שואל את עצמו, ועונה לעצמו, בלי להדפיס את תוצאת השאילתה כלפי המשתמש:

שאילתה פנימית-לולאה פנימית

?-katan(1,Z). (enter)

וכעת, מצין (pointer) אחד, חיצוני, שיך לשאילתה החיצונית, המקורית, ומצביע על השורה השלישית של קבץ התכנית, שם יש הצלחה (חלקית לפחות) בהשוואה בין השאילתה המקורית ובין קבץ המקור, והמצין הפנימי מתחיל לרוץ מלמעלה בקבץ ולחפש התאמה לשאילתה הפנימית.

ואכן, הלולאה הפנימית מצליחה לעצור מול השורה הראשונה בקבץ. אותו שם, אותו airity/2, ואותו משתנה ראשון 1. לכן שוב מבוצעת השמה $Z=2$, נשאלת שאילתה עוד יותר פנימית ונפתחת לולאה עוד יותר פנימית (שלישית בעמק).

?-katan(2,2). (enter)

לולאה פנימית זו נכשלת, ומודיעה על כך ללולאת הביניים. לכן לולאת הביניים מנסה להמשיך לרוץ מהשלב בו היא עצרה כשפתחה את הלולאה הפנימית כלומר החל מהשורה השנייה.

המחשב מנסה להשוות את השאילתה katan(1,Z) מול שאר השורות, השנייה והשלישית, ונכשל, ולכן לולאת הביניים מודיעה ללולאה החיצונית על כשלון. לכן המחשב מנסה להמשיך את הלולאה החיצונית. זו כבר עצרה בשורה השלישית, האחרונה, ולכן אין יותר לאן להתקדם. לכן מוכרז כשלון כללי והמחשב מודיע החוצה no.

נניח כי אנו שואלים את השאילתה:

?-kat (1,3). (enter)

שוב אפשר להגיע עד שלש לולאות, זו בתוך זו. הלולאה החיצונית מחפשת את השרשרת kat. היא מוצאת אותה רק בשורה השלישית. שוב נשאלת השאלה הפנימית יותר, katan(1,Z) ושוב נפתחת לולאה פנימית יותר עבור שאילתה זו. לולאה זו מצליחה (שוב) מול השורה הראשונה, מבצעת השמה $Z=2$, ושוב נפתחת לולאה פנימית עוד יותר, עם השאילתה katan(2,3). לולאה זו מצליחה, בשורה השנייה, ולכן המחשב עונה כלפי חוץ yes.

נניח כי אנו שואלים את השאילתה:

?-kat (1,A). (enter)

הכל כמעט זהה. הלולאה החיצונית תעצור בשורה השלישית. יוכרו כי $X=1$, ויוכרו שויון בין המשתנים $A=Y$. כעת תפתח לולאת הבינים עם השאילתה הפנימית $katan(1,Z)$, אשר מצליחה מול שורת הנתונים הראשונה ומוצב בה הנתון $Z=2$. כעת נפתחת לולאה עוד יותר פנימית עם שאילתה עוד יותר פנימית $katan(2,Y)$, אשר מצליחה מול השורה השנייה ומקבלים $Y=A=3$. כיון ש- Y הוא משתנה פנימי הוא איננו מדפס והמחשב מודיע תשובה $A=3$. נניח שאנו מדפיסים; . השאילתה הפנימית ביותר, $katan(2,Y)$ נכשלת, כיון שאין לה הצלחה נוספת. הלולאה שלפניה $katan(1,Z)$ נכשלת, ולכן יש להזיז את הלולאה החיצונית. אבל הסמן שלה נמצא במילא בשורה האחרונה שלו, ואין הצלחה נוספת. לכן תשובת המחשב היא no.

נניח כי אנו שואלים את השאילתה:

?-kat (A,B). (enter)

שוב נפתחת הלולאה החיצונית שבודקת את השאילתה. השאילתה יורדת עד השורה השלישית, ואז עוצרת. היא משוה פרמטרים. אי אפשר לדבר על השמות, כיון שאין אף ערך מספרי, ולכן רק מתבצע זהו משתנים, $A=X$, $B=Y$

כעת נפתחת השאילתה הפנימית, $katan(X,Z)$. שאילתה זו מבצעת לולאה, ועוצרת מול השורה הראשונה, ומבצעת השמות $A=X=1, Z=2$. וכעת נפתחות לולאה ושאילתה עוד יותר פנימיות, $katan(2,Y)$.

לולאה זו עוצרת מול השורה השנייה, ומבצעת השמה $Y=B=3$. כיון שכל הלולאות הצליחו, מדפיס המחשב כלפי המשתמש $A=1, B=3$. אם נדפיס את הפקודה; , כל המצינים יתקדמו, ולא יצליחו, והמחשב ידפיס no.

נתונה התכנית (source) פרולוג הבאה. katan.pl

-----תחילת התכנית--

katan(1,2).

katan(2,3).

katan(3,4).

kat(X,Y):-katan(X,Z), katan(Z,Y).

katkat(X,Y):-katan(X,Y).

$katkat(X, Y) :- katan(X, Z), katkat(Z, Y).$

-----סוף התכנית-----

תכנית זו כוללת בחבה את התכנית הקודמת ובנוסף עוד שלש שורות קלט. נוספה שורת הקלט הפשוטה. $katan(3,4)$ ובנוסף עוד שתי שורות קלט שעליהן נדון בהמשך.

5-5-2002-02

נניח גם שבתכנית זו אנו שואלים את השאילתה האחרונה:

?-kat (A,B). (enter)

כיון שהשאילתה תמיד מושוית אל קבץ המקור, וכיון ש- קבץ המקור כעת כולל את הקבץ המקורי בתוכו, וכיון ש- השורות של $katan$ בקבץ המקורי הן שתי השורות הראשונות של $katan$ גם בתכנית החדשה, נובע כי התשובה של המחשב תהיה זהה למקודם.

הערה חשובה תשובות המחשב לשאילתות הפרולוג, תלויות לא רק בתוכן הקבץ, אלא גם בסדר של שורות הנתונים, ואפילו בסדר של הרשום בתוך אותה שורה.

ובכן כיון שהתשובה תהיה זהה, נובע כי המחשב עוצר כאשר הלולאה החיצונית עוצרת מול השורה הרביעית, לולאת הבינים עוצרת מול השורה הראשונה, והלולאה הפנימית עוצרת מול השורה השניה. מתבצעות ההשמות $A=X=1, Z=2, B=Y=3$ ומתקבלת ההדפסה: $A=1, B=2$.

הפקודה ; וחפושים נוספים

מסתבר כי לפרולוג יש חזק נוסף המתבטא בפקודה ;. פקודה זו משמעה: המשך להריץ את השאילתה מאותו מקום, כלומר, צא ממצב הלולאות כפי שהוא עכשיו, המשך להריץ אותן, ועצור בהצלחה הבאה. פקודה זו ניתנת על המסך על ידי המשתמש, לאחר שהמחשב עצר ומצא הצלחה אחת.

נמשיך את השאילתה הקודמת עם פקודת ;. לכן הלולאה החיצונית היא על השורה הרביעית עם ההשוואות $A=X, Y=B$. שאילתת הבינים היא $katan(X, Z)$. אשר עוצרת מול השורה הראשונה ומבצעת השמות $A=X=1, Z=2$, והשאילתה הפנימית היא $katan(2, Y)$. אשר לפני רגע עצרה בשורה השניה, אך קבלה מהפקודה ; הוראה לעבור לשורה השלישית. בשורה זו אין הצלחה, והלולאה הפנימית רצה עד סוף התכנית ונכשלת. היא מדוחת כשלון ללולאה השניה, ולכן הלולאה השניה יורדת שורה, ומושוות מול השורה השניה. יש הצלחה על ידי ההשוואות $A=X=2, Z=3$. נפתחת לולאה פנימית

עם השאילתה. $katan(3, Y)$ אשר מצליחה מול השורה השלישית עם ההצבות $B=Y=4$. לכן המחשב שוב עונה $A=2, B=4$. אם שוב נעשה ; המחשב ימשיך לחפש מאותה שורה, אך לא יצליח ולכן יענה no ויסמן את זה שעבר על פני כל הנתונים ולא מצא עוד הצלחה.

5-5-2002-01
לולאות ב- פרולוג

עד עתה הבטנו בשתי תכניות פרולוג, שהיה בהן יחס דו מקומי $katan$, והשאילתות היו אודות היחס עצמו, ואודות ההרכבה של היחס עם עצמו. איך לנסות למצוא את היחס המרכב על עצמו שלש פעמים, ארבע פעמים וכדומה?

אפשרות א. לכל עומק של יחס לכתב קוד אחר. כמו ש- הקוד kat מתאים לעומק 2 של היחס $katan$, נכתב קוד שיתאים ל- $katan(3)$, כלומר להרכבה של היחס 3 פעמים, ארבע פעמים, וכן הלאה לכל עומק.

אפשרות ב. לכתב קוד אחד שיחשב ברקורסיה את כל העמקים של ההרכבות של היחס $katan$. נשים לב לקוד של היחס $katkat$, אשר הוא הסגור של ההרכבה של $katan$ עם עצמו מספר סופי כלשהו של פעמים. נשים לב, שכמו באינדוקציה, הקוד מרכב משני שלבים: שלב ההתחלה, שבו מתארים את היחס בעומק אחד, שהוא היחס המקורי, ושלב האינדוקציה, שבו מתארים את היחס באורך n על ידי הרכבה של יחס באורך אחד על יחס באורך $n-1$. בכך נקבל שתי שורות:

שלב ההתחלה: $katkat(X, Y) :- katan(X, Y)$. תנאי זה קרוי גם תנאי עצירה.

שלב האינדוקציה: $katkat(X, Y) :- katan(X, Z), katkat(Z, Y)$. כאשר יש שרשרת באורך $n-1$ בין Z ובין Y , ושרשרת באורך אחד בין X ובין Z .

נניח שאנו שואלים את השאילתה $katkat(1, A)$. המחשב פותח לולאה חיצונית, שעוברת על פני השורות, ועוצרת בשורה החמישית. מתבצעות ההשוואות/ השמות הבאות:
 $X=1, Y=A$, ונפתחת לולאה פנימית עם השאילתה: $katan(1, Y)$. המחשב סורק על ידי הלולאה הפנימית את השורות, ועוצר בשורה הראשונה, שם מתבצעת ההשמה $Y=2$. המחשב עונה החוצה $A=2$. נניח כי בצענו את הפקודה ; שפרושה, קדם את הלולאה הפנימית ביותר שורה אחת, והמשך

לחפש הצלחה משלב זה ואילך. במקרה זה עוברת השאילתה $katan(1, Y)$ לשורה השנייה, אך נכשלת שם וביתר השורות. לכן היא מדוחת ללולאה של השאילתה החיצונית

($katkat(1, A)$) על כשלון, ולכן לולאה זו עוברת לשורה האחרונה, ומתבצעות ההשוואות/ השמות $X=1, Y=A$. שוב נפתחת השאילתה הפנימית $katan(1, Y)$, ושוב היא עוצרת בשורה הראשונה עם ההשמה $(A=)Y=2$.

אך הפעם ההצלחה של השאילתה $katan(1, Y)$ על ידי הנתון $Y=2$ אינה מספיקה, ונפתחת השאילתה הפנימית הנוספת $katkat(2, Y)$. שאילתה זו יוצרת לולאה שלישית, עם הצלחה בשורה החמישית ועם הצבות. נשים לב כי ישנם משתני Y גם בלולאה השלישית וגם יהיו ברביעית, ולכן, מעתה, כדי לא להתבלבל, נסמן כל משתנה, בנוסף, באינדקס המצין מהו המספר הפנימי של הלולאה שפתחה אותו. כך השאילתה האחרונה תסומן $katkat(2, Y3)$.

שאילתה פנימית זו רצה על פני השורות, ועוצרת רק בפקודה החמישית. היא פותחת לולאה רביעית עם השאילתה $katan(2, Y4)$ ועם ההשוואה $Y3=Y4$. הלולאה הרביעית עוצרת מול שורת הקוד השנייה ונוצרת השמה: $Y4=3$. הלולאה מדוחת ללולאה הקודמת על הצלחה, ומבוצעת השמה $Y3=Y4=3$. זו מדוחת ללולאה השנייה על הצלחה, ומתבצעת השמה $Y=Y3=3$, וזו מדוחת ללולאה הקודמת על הצלחה ומתבצעת השמה $A=3$, וזה מה שמדפיס המחשב כעת.

שוב נדפיס את הפקודה ; , ושוב המחשב מקדם את הלולאה הפנימית ב- שורה. לשאילתה הפנימית $katan(2, Y4)$ אין יותר שורות הצלחה, והיא מדוחת על כשלון לשאילתה השלישית $katkat(2, Y3)$. לכן שאילתה זו מתקדמת לשורה האחרונה, ופותחת לולאה רביעית $katan(2, Y4)$. גם לולאה זו עוצרת בשורה השנייה, ומקבלת $Y4=3$. אבל כדי שלולאה 3 תצליח, צריכה להתקיים עוד לולאה המתאימה לשאילתה $katkat(3, Y5)$. שאילתה זו עוצרת מול השורה השלישית ומקבלת את הערך $Y5=4$. יש דווח ללולאה הרביעית על הצלחה. נעשית השמה $Y3=Y5=4$. שוב נעשות השמות והמחשב מדוח החוצה $A=4$.

12-5-2002-02

בשלב זה יש יותר מדי לולאות ומשתנים, ולכן נרשם את זרימת התכנית שכבר נעשתה, בצורה מסודרת:

question: $katkat(1, A)$.

loop 1 $katkat(1, A1)$.

line 5 open

```

loop 2 : katan(1,A2).
A1=A2
line 1 A2=2.
loop 1 : A1=2
print A=2.
;
loop 2 ends.
loop 1 katkat(1,A1).
line 6 open.
loop 2 katan(1,Y2), loop 3 katkat(Y2,A3).
A3=A1.
loop 2 line 1, Y2=2.
loop 3 katkat(2,A3).
line 5
loop 4 katan(2,A4).
A4=A3.
line 2 A4=3.
loop 3 A3=3.
loop 1 A1=A3=3.
print A=3
;
loop 4 ends.
loop 3 katkat(2,A3).
line 6 open.
loop 4 katan(2,Y4), loop 5 katkat(Y4,A5).
A3=A5.
loop 4 line 2, Y4=3.
loop 5 line 5.
loop 6 katan (3,A6).
A6=A5.
line 3, A6=4.
loop 5, A5=4.
loop 3, A3=4.
loop 1 A1=4.
print A=4.
;
loop 6 ends.

```

loop 5 line 6.
open loop 6 katan(3,Y6), loop 7 katkat(Y6,A7).
A5=A7.
loop 6, line 3, Y6=4.
loop 7 katkat(4,A7).
A7=A5.
line 5.
open loop 8 katan(4,A8).
loop 8 fails.
loop 7, line 6.
open loop 8 katan(4,Y8), loop 9 katkat(Y8,A9).
A9=A7.
loop 8 ends.
loop 7 ends.
loop 6 ends.
loop 5 ends.
loop 4 ends.
loop 3 ends.
loop 2 ends.
loop 1 ends.
print no.

19-5-2002-02

12-5-2002-01

15-5-2002-03

תרגיל בית מספר 23 להגשה בכתב עוד שבוע
הגש ריצה יבשה של התכנית עבור השאילתות:

.katkat(3,A) ו- katkat(2,A)

נניח כי אנו שואלים את השאילתה .katkat(A,4). נבצע ריצה יבשה של התכנית.

question katkat(A,4).
loop 1 katkat(A1,4).
line 5 open.
loop 2, katan(A2,4).
A2=A1.
line 3, A2=3.
loop 1, A1=3.
print A=3.

;
 loop 2 ends.
 loop 1, line 6.
 loop 2 katan(A2,Y2), loop 3 katkat(Y2,4).
 A2=A1.
 loop 2 line 1, A2=1, Y2=2.
 loop 3 katkat(2,4).
 line 5, katkat(2,4).
 open loop 4, katan(2,4).
 loop 4 ends.
 loop 3, line 6
 open loop 4, katan(2,Y4), loop 5, katan(Y4,4).
 loop 4, line 2, Y4=3.
 loop 5, katan(3,4).
 loop 5, yes.
 loop 1, A1=1.
 print A=1.
 ;
 loop 5 ends.
 loop 4 ends.
 loop 3 ends.
 loop 2 line 2, A2=2, Y2=3.
 loop 3, katkat(3,4).
 loop 3, line 5.
 open loop 4, katan(3,4).
 line 3, yes.
 loop 1, A1=2.
 print A=2.
 ;
 loop 3, line 6, katkat(3,4).
 open loop 4, katan(3,Y4), loop 5, katkat(Y4,4).
 loop 4, line 3, Y4=4.
 loop 5, katkat(4,4).
 line 5, open loop 6, katan(4,4).
 loop 6 ends.
 loop 5, line 6, katkat(4,4).
 open loop 6, katan(4,Y6), loop 7, katkat(Y6,4).

loop 6 ends.
 loop 5 ends.
 loop 4 ends.
 loop 3 ends.
 loop 2, line 3, A2=3, Y2=4.
 loop 3, katkat(4,4).
 loop 3, line 5, open loop 4, katan(4,4).
 loop 4 ends.
 loop 3, line 6.
 open loop 4, katan(4,Y4), loop 5, katkat(Y4,4).
 loop 4 ends.
 loop 3 ends.
 loop 2 ends.
 loop 1 ends.
 print no.

תרגיל בית מספר 24 להגשה בכתב עוד שבוע
 ערוך ריצה יבשה של התכנית עבור השאלות הבאות:
 katkat(A,2), katkat(A,3), katkat(A,B).

19-5-2002-01

22-5-2002-03

רשומות של נתונים בפרולוג, פקודות אריתמטיות

נתונים סוגרים רבועיים, וביניהם פסיקים המהדר מזהה את הסימון הזה כרשימה סדורה.

דוגמאות:

רשימה סדורה בת שלשה קבועים: [k,l,m].

רשימה סדורה בת ארבעה משתנים: [X,Y,Z,W].

רשימה סדורה בת קבוע אחד ושלושה משתנים: [X1,k,X2,X3].

רשימה סדורה בת שני אברים: האחד קבוע, השני עצמו רשימה:

[m,[a,b,c]]

השוואה בין רשומות:

אי אפשר להשוות בין שתי רשימות, אם אין להם אותו מספר מקומות (airity)

אם יש להם אותו airity נעשית השואת התכנים של כל מקום ומקום מתאים. אם יש באותם מקומות מתאימים קבועים, עליהם להזדהות. אם אין זהות, ההשוואה נכשלת. אם יש קבוע מול משתנה, ערך הקבוע נטען למשתנה (שלא כמו בשפת c לא משנה האם המשתנה הוא בצד שמאל או ימין של סימן השויון). אם שני האיברים הם משתנים, אז מוכרז על היותם זהים, וכל השמה של ערך קבוע לאחד מהם, תטען באופן אוטומטי את השני באותו ערך.

פעולות אריתמטיות

המלה is מסמנת את סימן השויון כפי שהוא בשפות c, פורטרן, אסמבלר וכדומה: בצע את האריתמטיקה שבצד ימין של המלה, וטען את הערך לצד שמאל שלה. צד שמאל חייב להיות משתנה, ולא בטוי אלגברי.

דוגמה לתכנית factorial

-----begin factorial-----

factorial(0,1).

factorial(N,F):- N>0, N1 is N-1, factorial(N1,F1), F is F1*N.

-----end factorial-----

כפי שנראה תכנית זו מחשבת ב- F את העצרת של N.

26-5-2002-02

תרגיל בית מספר 25 להגשה בכתב עוד שבוע

כתוב שני קודים שונים, binom(N,K,B) כך ש- N,K הם נתונים טבעיים, ו- B הוא המקדם הבינומי N מעל K. דוגמאות שאילתא:

binom(3,2,F).

F=3.

binom(6,3,B).

F=20.

על שני הקודים להיות שונים במובן הבא: אחד מהם יכול להשתמש בכל הפעולות האריתמטיות: חבור, חסור, כפל וחלוק, ואילו על השני אסור להשתמש ב- כפל ו- חלוק, אך מותר להשתמש בחבור ובחסור.

הפרדת רשומה לאיבר הראשון ולשאר הרשומה.

נתונה רשומה כלשהי [k,i,sh,k,u,sh]. הסימון [X|Y] אומר: הכנס ל- X את האיבר השמאלי ברשומה, ואת שאר הרשומה המקוצצת לתוך Y. כיון שאין כזו פקודה לגבי צד ימין, (כלומר פקודת שפה אשר קוצצת את האיבר הימני), הרי ש- בכך מסתבר ששפת הפרולוג היא שמאלנית.

דוגמא

נכתב קוד, orech(R,O), אשר מקבל כקלט רשומה סדורה R, ונותן כפלט ב-O את אורך הרשומה R. דוגמאות ריצה:

orech([a,b,c],N).

N=3.

orech([[a,b,c]],N).

N=1.

והקוד המתאים הוא:

-----code of orech(-,-).

orech([],0).

orech([X|Y],N):-orech(Y,NP1), N is NP1+1.

-----end code orech(-,-).-----

26-5-2002-01,29-5-2002-03

orech([a,b,c,d],N). נניח כי שאלנו את התכנית שאילתא: מתחילה לולאה חיצונית ונתחיל עם הסימונים כרגיל:

begin loop 1, orech([a,b,c,d],N1).

line 2, X1=a, Y1=[b,c,d] N1 is N2+1.

begin loop 2, orech([b,c,d],N2).

line 2, X2=b, Y2=[c,d] N2 is N3+1.

begin loop 3, orech([c,d],N3).

line 2, X3=c, Y3=[d] N3 is N4+1.

begin loop 4, orech([d],N4).

line 2, X4=d, Y4=[] N4 is N5+1.

begin loop 5, orech([],N5).

line 1, N5=0.

loop 4, N4=1.

loop 3, N3=2.

loop 2, N2=3.

loop 1, N1=4.

print N=4.

כתוב קוד $mizug(L,M,N)$ שבו L , M ו- N הן רשימות קלט ו- N היא רשימת פלט המתקבלת מרשום אברי L ואח"כ רשום אברי M מימינם.

```
-----code mizug(L,M,N)
mizug([],L,L).
mizug([X|Y],L,[X|M]):-mizug(Y,L,M).
-----end code
```

דוגמה לשאילתא של mizug.

נביט בשאילתא $mizug([a,b,c],[d,e],L)$.

```
?-mizug([a,b,c],[d,e],L).
begin loop 1, mizug([a,b,c],[d,e],L1).
line 2 X1=a, Y1=[b,c], L1=[a|L2].
begin loop 2, mizug([b,c],[d,e],L2).
line 2 X2=b, Y2=[c], L2=[b|L3].
begin loop 3, mizug([c],[d,e],L3).
line 2 X3=c, Y3=[], L3=[c|L4].
begin loop 4, mizug([],[d,e],L4).
line 1, L4=[d,e].
loop 3, L3=[c,d,e].
loop 2, L2=[b,c,d,e].
loop 1, L1=[a,b,c,d,e].
print L=[a,b,c,d,e].
```

כתוב קוד $hafuch(L1,L2)$ אשר בו $L1$ היא רשימת קלט, $L2$ רשימת פלט, כך שאיברי $L2$ הפוכים בסדרם מאברי $L1$.

```
-----code hafuch(L1,L2).
hafuch([X],[X]).
hafuch([X,Y|Z],T):-hafuch([Y|Z],L), mizug(L,[X],T).
mizug([],L,L).
mizug([X|Y],N,[X|M]):-mizug(Y,N,M).
-----end code hafuch-----
```

נשים לב כי הקוד של $hafuch$ כולל בתוכו את הקוד של $mizug$.

דוגמה לשאילתא של hafuch.

נביט בשאילתא (L, [a,b,c,d]).hafuch

?-hafuch([a,b,c,d],L).
begin loop 1 hafuch([a,b,c,d],L1).
line 2, X1=a, Y1=b, Z1=[c,d],
begin loop 2, hafuch([b,c,d],L2).
begin loop 3, mizug(L2,[a],L1).
loop 2 line 2, X2=b, Y2=c, Z2=[d]
begin loop 4, hafuch([c,d],L4).
begin loop 5, mizug(L4,[b],L2).
loop 4 line 2, X4=c, Y4=d, Z4=[].
begin loop 6, hafuch([d],L6).
begin loop 7, mizug(L6,[c],L7). L4=L7.
loop 6 line 1, L6=[d].
loop 7 line 4, X7=d,Y7=[],N7=[c],
begin loop 8, mizug([],[c],M8).
loop 8 line 3, M8=[c].
loop 7, L7=[d,c].
L4=[d,c].
loop 5, mizug([d,c],[b],L2).
line 4, X5=d, Y5=[c], N5=[b],M5=[d|M9].
begin loop 9, mizug([c],[b],M9).
loop 9 line 4, X9=c, Y9=[], N9=[b], M9=[c|M10].
begin loop 10, mizug([],[b],M10).
loop 10, line 3, M10=[b].
loop 9, M9=[c,b].
loop 5, M5=[d,c,b].
loop 2, L2=M5=[d,c,b].
activate loop 3, mizug([d,c,b],[a],L3), L3=L1.
loop 3, line 4, X3=d, Y3=[c,d], N3=[a], L3=[d|M11].
begin loop 11, mizug([c,b],[a],M11).
loop 11, line 4, X11=c, Y11=[b], N11=[a], M11=[c|M12].
begin loop 12, mizug([b],[a],M12).
loop 12, line 4, X12=b, Y12=[], N12=[a], M12=[b|M13].
begin loop 13, mizug([],[a],M13).

```

loop 13, line 3, M13=[a].
loop 12, M12=[b,a].
loop 11, M11=[c,b,a].
loop 3, L3=[d,c,ba].
loop 1, L1=[d,c,b,a].
print L=[d,c,b,a].

```

תרגיל בית מספר 26 להגשה בכתב עוד שבוע

I. כתוב תכנית פרולוג. $last(L,T)$ שבה L הוא רשומת קלט (לא ריקה) של איברים, ו-T הוא תוצאת הפלט אשר נותנת את האיבר האחרון, הימני ביותר, של L. דוגמאות שאילתות:

```

last([a,b,c],X).
X=c.
last([a]).
X=a.

```

II. השתמש בקוד של סעיף א, כדי לכתוב קוד אחר המבצע את מה שמבצע הקוד hafuch.

פתרון (אחד הטורים) של מבחן מועד א התשס"א

שאלה 1 (10 נקודות).

	p	q	$p \oplus q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

p	$\neg p$
0	1
1	0

האם ניתן להגדיר באמצעותם את הקשר \forall ? אם כן, בטא אותו. אם לא, תן נמוק קצר. אין צורך בהוכחה פורמלית.

תשובה: אי אפשר כיון ש- באמצעות הקסור והשלילה כל קשר שנכתב יהיה בעל מספר זוגי של 0 ו-1, או קשר השלילה, ולעומת זאת לקשר האחד יש 3 אחדים ו-0 יחיד.

שאלה 2 (14 נקודות)

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו-B ויחס דו מקומי D. לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U. תן נמוק קצר לקביעתך:

- $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
- $\forall x \forall y [D(x,y) \rightarrow (\exists z (B(z) \wedge D(x,z)))]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow D(x,z)]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(\neg D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
- $\exists x \forall y [D(x,y)]$.
- $\forall x \forall y [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(x,y)]$.

$$U=\mathbb{R}, D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x-y \in \mathbb{Q}\}, A=\{x \in U, x \in \mathbb{Q}\}, B=\{x \in U, x > 1\}.$$

תשובות:

בכל מקרה של גרירה מספיק לבדוק האם $1 \rightarrow 1$ או $1 \rightarrow 0$.

- true: $x-y \in \mathbb{Q}, y-z \in \mathbb{Q} \rightarrow x-z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q}$.
- true: $x-y \in \mathbb{Q}, z = x - [x] + 2, z > 1, x-z = [x] - 2 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- not true: contra-example: $x=y, z=x+\sqrt{2}$.
למעשה פסוק זה אף פעם לא נכון: $x-y, x-z \in \mathbb{Q} \rightarrow y-z = (x-z) - (x-y) \in \mathbb{Q}$
- not true: contra-example: $x=z, y=x+\sqrt{2}$.
- not true. For all x, choose $y = x + \sqrt{2}$.

f. not true. Contra example: $x=0, y=+\sqrt{2}$.

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \exists y [R(x,y)]$.
2. $\exists x \forall y [R(x,y) \rightarrow (x=y)]$.
3. $\exists x \exists y \exists z [R(x,y) \wedge R(x,z)]$.

4. $\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$.

איך בכלל לבנות כזה מודל? המודל מראה כי הטענה הרביעית לא נובעת משלשת הראשונות. לכן ננסה להוכיח את 4 מתוך 1, 2, ו-3, לא נצליח, אך נסיון ההוכחה יתן לנו כמה נתונים למודל.

5. $\forall y [R(a,y) \rightarrow (a=y)]$, 2, EP(X/a).
6. $R(a,y) \rightarrow (a=y)$, 5, US(y/y).
7. $\exists y \exists z [R(b,y) \wedge R(b,z)]$, EP(x/b).
8. $\exists z [R(b,c) \wedge R(b,z)]$, EP(y/c).
9. $R(b,c) \wedge R(b,d)$, EP(z/d).
10. $R(b,c)$, 9, perut.
11. $R(b,d)$, 9, perut.
12. $\exists y [R(a,y)]$, 1, US(x/a).
13. $R(a,e)$, 12, EP(y/e).
14. $R(a,e) \rightarrow (a=e)$, 5, US(y=e).
15. $a=e$, 13,14,MP.
16. $\exists y [R(b,y)]$, 1, US(x/b).
17. $R(b,f)$, 16, EP(y/f).
18. $\exists y [R(c,y)]$, 1, US(x/c).
17. $R(c,g)$, 16, EP(y/g).

בשלב זה אנו רואים כי המודל הכללי ביותר הוא אינסופי, כיון שלכל אות המסמנת משתנה, יש לפי תכונה 1 אות נוספת חדשה, עבודה מתקימת תכונה 1. אנו רואים בשלב זה גם כי תכונה 4 לא מתקימת, כיון שאין בהכרח סימטריה. נתון $R(b,c)$ אך לא נתון $R(c,b)$. בשלב זה נעזב את המודל הכללי ביותר, שהוא הכרחי אם מנסים להוכיח הוכחה כללית, ונסתפק במקרה פרטי יותר.

למשל בתכונה 3, אותה ניסינו לממש בצורה כללית ביותר בתכונות 7,8,9, הנחנו כי כל המשתנים שונים זה מזה. הנחה זו היא הנחת חובה עבור המקרה הכללי ביותר, אבל איננה חובה עבור מקרה פרטי. לכן נוכל לזהות חלק מהקבועים.

האם כדאי לזהות את a עם b ? לא, כי אז b היה מקים את תכונה 6, והיחס R היה סימטרי כאשר b מעורב. אבל אנו מנסים לסתר את תכונה 4 האומרת כי R סימטרי.

האם כדאי לזהות את b עם c ? שוב לא כי אז היחס $R(b,c)$ שאיננו סימטרי יהפך ליחס הסימטרי $R(b,b)$.

ברגע זה, כשיש לנו מצב חסר סימטריה של R אין לנו שום ענין להוסיף איברים נוספים, ורק צריך לשלשתי האיברים השונים a,b,c יקימו את היחס כך ש- הוא ישאר לא סימטרי, וכך שכל שלשת הדרישות 1,2,3 תתקיימנה.

דרישה 2 כבר קימת לגבי האבר הפרטי a , בתנאי שלא נקלקל ונוסיף איזשהו יחס מהצורה $R(a,y)$, למעט המקרה $a=y$ שכבר הוספנו. דרישה 3 תתקיים, ומותר להציב $d=c$. נותר רק לדאוג לדרישה מספר 1. היא מתקיימת עבור a על ידי $R(a,a)$. היא מתקיימת עבור b על ידי $R(b,c)$ ונותר לבדוק אותה עבור c . האם כדאי להגדיר $R(c,b)$? לא, כי אז R יהפך לסימטרי. אפשר להגדיר כל אחד מ- $R(c,a)$, $R(c,c)$ או שניהם. לכן קבלנו שלשה מודלים בני שלשה איברים:

מודל א:

$$U=\{a,b,c\}, R=\{(a,a), (b,c), (c,a)\}.$$

מודל ב:

$$U=\{a,b,c\}, R=\{(a,a), (b,c), (c,c)\}.$$

מודל ג:

$$U=\{a,b,c\}, R=\{(a,a), (b,c), (c,a),(c,c)\}.$$

נבדק את אחד המודלים בלבד, למשל א.

המודל איננו סימטרי, ולכן לא מקים את 4.

תכונה 1 מתקיימת לכל x . עבור $x=a$ ה- y המתאים הוא $y=a$. עבור $x=b$

ה- y המתאים הוא $y=c$. עבור $x=c$ ה- y המתאים הוא $y=a$.

תכונה 2 מתקימת עבור $x=a$. ואכן תכונה 6 שהתקבלה ממנה $R(a,y) \rightarrow$
 (a=y) מתקימת לכל y . עבור $y=a$ נקבל $1 \rightarrow 1$. עבור $y=b,c$ נקבל
 $0 \rightarrow 0$.

תכונה 3 מתקימת עבור $x=a,y=z=b$ כדרוש.

שאלה 4 (3X12).

לפניך שלשה טעונים בשפת תחשיב היחסים. לגבי כל טעון, אם הוא תקף,
 הבא הוכחה מלאה לתקפותו, ובאם איננו תקף, הוכח את אי תקפותו על ידי
 מציאת מודל מתאים.

א.

1. $\forall x \forall y \forall z [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$.
2. $\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$.

-
3. $\forall x R(x,x)$.

נשים לב כי כל גרירה תמיד נכונה מידית במצב של $0 \rightarrow 0$, ולכן אם נביט ביחס
 ריק, תכונות 1,2 תתקיימנה מידית, ואילו תכונה 3 לא תתקיים עבור אף איבר.
 נגדיר:

$$U = \{a\}, R = \emptyset.$$

יחס זה מקיים את 1,2 ולא את 3 כדרוש.

ב.

1. $\forall x [P_x \rightarrow (\forall y [Q_y \leftrightarrow (\neg R_{x,y})])]$.
2. $\exists x [P_x \wedge (\forall y [(\neg S_y) \rightarrow R_{x,y}])]$.
3. $\forall x (\forall y [(P_x \wedge S_y) \rightarrow (\neg R_{x,y})])$.

צ"ל

$$\forall x [Q_x \leftrightarrow S_x].$$

זהו תרגיל שכבר נעשה בעמוד 52 של הקבץ הקודם.

ג.

1. $\forall x \forall y [(S(x) \wedge T(y)) \rightarrow R(x,y)]$.
2. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge P(x)) \rightarrow (S(x) \wedge T(y))]$.
3. $\exists x P(x)$.

4. $\forall x \forall y [(S(x) \wedge T(y)) \leftrightarrow R(x,y)]$.

ננסה להוכיח, ובאם לא נצליח, נשתמש בכך למודל.

5. $P(a)$, 3, EP(x/a).
6. $\forall y [(R(a,y) \wedge P(a)) \rightarrow (S(a) \wedge T(y))]$, 2, US(x/a).
7. $(R(a,y) \wedge P(a)) \rightarrow (S(a) \wedge T(y))$, 6, US(y/y).
8. $P(a) \rightarrow (R(a,y) \rightarrow (S(a) \wedge T(y)))$, 7, exportatia.
9. $R(a,y) \rightarrow (S(a) \wedge T(y))$, 5,8, MP.
10. $\forall y [(S(x) \wedge T(y)) \rightarrow R(x,y)]$, 1, US(x/x).
11. $(S(x) \wedge T(y)) \rightarrow R(x,y)$, 10, US(y/y).

אנו רואים כי 9 הוא כמעט ההפוך של 11, אבל לא ממש, כיון ש-9 נכון רק אם $x=a$ ולעומתו 11 נכון לכל x . ננסה למצא מודל נגדי. במודל זה יהיה איבר b כך ש- $R(b,y)$ נכון אך $(S(b) \wedge T(y))$ לא נכון, ובכך 4 לא יתקיים. כדי שלא תהיה סתירה עם תכונה 2 אסור ל b לקיים את P . ננסה לבנות מודל רק על סמך נתונים אלו.

$$U=\{a,b\}, P=\{a\}.$$

ראינו כבר כי רק a יכול לקיים את P כדי שתכונה 4 לא תתקיים. נשתמש ב-9. ננסה את $R(a,a)$. אם זה נכון, אז $S(a), T(a)$ נכונים. כדי לסתור את 4 בניח כי $R(b,a)$ נכון. זהו, נסכם את המודל.

$$U=\{a,b\}, P=S=T=\{a\}, R=\{(a,a), (b,a)\}.$$

וכעת נבדק את התכונות.

תכונה 1.

אם מה שלפני החץ הוא 0 התכונה נכונה. נותר רק לבדק את המקרה $1 \rightarrow ?$ ולקוות כי ? יצא 1 גם כן. כדי שהבטוי לפני החץ יהיה 1, גם S וגם T צריכים להיות נכונים. כדי שזה יקרה צריך להתקיים $x=y=a$, ואכן במקרה זה גם $R(a,a)$ נכון כדרוש.

תכונה 2.

שוב, נותר רק לבדק את המקרה $? \rightarrow 1$ ולקוות כי ? יצא 1 גם כן. כדי שהבטוי לפני החץ יהיה 1, $P(x)$ חייב להיות נכון, ולכן $x=a$. במקרה זה $R(x,y)$ חייב להיות נכון, וכיון ש- $x=a$, נובע כי $y=a$. ובאמת במקרה זה מה שאחרי החץ נכון.

. תכונה 3

תכונה זו נכונה בברור (רק) עבור $x=a$.

. תכונה 4

תכונה זו לא מתקימת עבור $x=b, y=a$. אז R מתקים אבל $S(b)$ לא נכון ולכן כל אגף שמאל לא נכון.

שאלה 5 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $last(X,Y)$ שבו X היא רשימת קלט סדורה, ו- Y הוא האיבר האחרון ברשימה. דוגמת ריצה:

$?-last([a,b,c],Y)$.

$Y=c$.

זהו תרגיל בית מספר 26 א בעמוד 19.

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $hituch(X,Y,Z)$ שבו X,Y הן רשימת קלט סדורות, ו- Z היא רשימת פלט סדורה אשר כוללת את האיברים המשותפים ל- X ול- Y . דוגמת ריצה:

$?-hituch([a,b,c],[d,c,a],S)$.

$S=[a,c]$.

תשובה:

-----code of hituch-----

$hituch([],S,[])$.

$hituch([X|Y],S,[X|T]):- evar(X,S),hituch(Y,S,T)$.

$hituch([X|Y],S,T):- not(evar(X,S)),hituch(Y,S,T)$.

```

evar(X,[X|Y]).
evar(X,[Y|Z]):- evar(X,Z), X\=Y.
-----end code hituch-----

```

שאלה 7 (10 נקודות)

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, I(X,Y,Z).

```

-----begin code-----
I([],Y,Y).
I([X|Y],Z,[X|W]):-I(Y,Z,W).
-----end code-----

```

ונתונה השאילתא

?-I([a,b,c,d],[e],S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

הערה

נשים לב כי הקוד של I הוא בדיוק הקוד של mizug אשר כתובה בעמוד 17.

תשובה

```

?-I([a,b,c,d],[e],S).
begin loop 1, I([a,b,c,d],[e],S1).
line 2, X1=a, Y1=[b,c,d], Z1=[e], S1=[a|S2].
begin loop 2, I([b,c,d],[e],S2).
line 2, X2=b, Y2=[ c,d], Z2=[e], S2=[b|S3].
begin loop 3, I([c,d],[e],S3).
line 2, X3=c, Y3=[d], Z3=[e], S3=[c|S4].
begin loop 4, I([d],[e],S4).
line 2, X4=d, Y4=[], Z4=[e], S4=[d|S5].
begin loop 5, I([],[e],S5).
line 1, S5=[e].
loop 4, S4=[d,e].
loop 3, S3=[c,d,e].
loop 2, S2=[b,c,d,e].
loop 1, S1=[a,b,c,d,e].
print S=[a,b,c,d,e].

```

פתרון (טור אחר) של מבחן מועד א התשס"א

שאלה 1 (10 נקודות).

	p	q	$p \oplus q$: על ידי
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

p	$\neg p$
0	1
1	0

האם ניתן להגדיר באמצעותם את הקשר \wedge ? אם כן, בטא אותו. אם לא, תן נמוק קצר. אין צורך בהוכחה פורמלית.

התשובה היא אי אפשר, בדיוק כמו בטור הקודם, כיון ששוב מנסים לבטא קשר בעל מספר אי-זוגי של 1 – ים על ידי קסור ושלילה.

שאלה 2 כמו שאלה 2 בטור הקודם אך בשנוי סדר הסעיפים.

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\exists x \forall y [R(x,y) \rightarrow (x=y)]$.
2. $\exists x \exists y \exists z [R(x,y) \wedge R(x,z)]$.
3. $\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$.

4. $\forall x \exists y [R(x,y)]$.

שוב נתחיל בתכונה 1, אחריה ב- 2 ואח"כ ב- 3, וננסה להוכיח את 4.

5. $\forall y[R(a,y) \rightarrow (a=y)], 1, EP(x/a).$
6. $\exists y \exists z[R(b,y) \wedge R(b,z)], 2, EP(x/b).$
7. $\exists z[R(b,c) \wedge R(b,z)], 6, EP(y/c).$
8. $R(b,c) \wedge R(b,d)], 7, EP(z/d).$
9. $\forall y[R(b,y) \rightarrow R(y,b)], 3, US(x/b).$
10. $R(b,c) \rightarrow R(c,b), 9, US(y/c).$
11. $R(b,c), 8, perut$
12. $R(c,b), 11, 10, MP.$
13. $\forall y[R(c,y) \rightarrow R(y,c)], 3, US(x/b).$
14. $R(b,d) \rightarrow R(d,b), 13, US(y/d).$
15. $R(b,d), 8, perut$
16. $R(d,b), 15, 14, MP.$

השתמשנו בתכונות 1,2,3 והסקנו את כל מה שאפשר. האם תכונה 4 תמיד מתקימת? עבור $x=b$ נוכל לבחור $y=c$. עבור $x=c$ נוכל לבחור $y=b$. עבור $x=d$ נוכל לבחור $y=b$. אבל עבור $x=a$ אין כרגע במי לבחור. אם לא נוסיף על היחס, 1 יתקים ו 4 לא יתקים, ולכן נגדיר:

$$U = \{a, b, c, d\}, R = \{(b, c), (b, d), (c, b), (d, b)\}$$

ונבדק כי אכן התכונות כלן מתקימות.

. תכונה 1

מתקימת עבור $x=a$ כי מה שלפני החץ הוא 0 לכל y .

. תכונה 2

מתקימת עבור $x=b, y=c, z=d$.

. תכונה 3

מתקימת כי היחס סימטרי.

. תכונה 4

לא מתקימת עבור $x=a$ כיון שאין אף y כך ש- $R(a,y)$.

שאלה 4 כמו שאלה 4 בטור הקודם אך בשנוי סדר הסעיפים.

שאלה 5 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $pre(X, Y)$, אשר בו X ו- Y הן רשימות סדורות לא ריקות, המצליח אם X הוא פרפיקס של Y . דוגמאות ריצה:
?-pre([a,b,c],[a,b,c,d]).
yes.
?-pre([a,b,c],[a,b,d,c]).
no.

תשובה

```
-----code of pre(X,Y)-----  
pre([X],[X|Y]).  
pre([X,Y|Z],[X|W]):-pre([Y|Z],W).  
-----end of code-----
```

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $mash(X, Y, Z)$, אשר בו X, Y הן רשימות סדורות לא ריקות, Z היא רשומה, המצליח אם Z הוא אסוף אברי Y שאינם ב- X . דוגמאות ריצה:

```
?-mash([a,b,c],[a,b,c,d],S).  
S=[d].  
?-mash([a,c,e],[a,b,c,d],S).  
S=[b,d].
```

תשובה

```
-----code of mash-----  
mash([],Y,Y).  
mash([X|Y],Z,W):-mash(Y,Z,A),mk(X,A,W).  
mk(X,[],[]).  
mk(X,[X|Y],Z):-mk(X,Y,Z).  
mk(X,[Y|Z],[Y|W]):-X\=Y,mk(X,Z,W).  
---end code-----
```

שאלה 7 (10 נקודות)

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, $h(X, Y)$

```
-----begin code-----  
h([],[]).  
h([X|Y],W):-h(Y,Z),mizug(Z,[X],W).
```

-----end code-----

כאשר mizug הוגדרה בעמוד 17 , ונתונה השאילתא

?-h([d,c,b,a],S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

?-h([d,c,b,a],S).

begin loop 1 h([d,c,b,a].S1).

line 2 X1=d, Y1=[c,b,a].

begin loop 2, h([c,b,a],W2).

begin loop 3, mizug(W2,[d],W1).

loop 2, line 2, X2=c, Y2=[b,a].

begin loop 4, h([b,a],W4).

begin loop 5, mizug(W4,[c],W2).

loop 4, line 2, X4=b, Y4=[a].

begin loop 6, h([a],W6).

begin loop 7, mizug(W6, [b], W4).

loop 6, line 2, X6=a, Y6=[].

begin loop 8, h([],W8).

begin loop 9, mizug(W8,[a],W6).

loop 8, line 1, W8=[].

נוסיף את השורות של mizug כשורות 3 ו- 4 .

mizug([],L,L).

mizug([X|Y],N,[X|M]):-mizug(Y,N,M).

ונמשיך את התכנית.

activate loop 9, mizug([],[a],W6).

line 3, W6=[a].

activate loop 7, mizug([a],[b],W4).

line 3, W6=[a].

line 4, X7=a, Y7=[], N7=[b], W4=[a|W10].

begin loop 10, mizug([],[b],W10).

loop 10, line 3, W10=[b].

loop 7, W4=[a,b].

activate loop 5, mizug([a,b],[c],W2).

loop 5, line 4, X5=a, Y5=[b], N5=[c], W2=[a|W11].

begin loop 11, mizug([b],[c],W11).

loop 11, line 4, X11=b, Y11=[], N11=[c], W11=[b|W12].
 begin loop 12, mizug([], [c], W12).
 loop 12, line 3, W12=[c].
 loop 11, W11=[b,c].
 loop 5, W2=[a,b,c].
 activate loop 3, mizug([a,b,c], [d], W1).
 loop 3, line 4, X3=a, Y3=[b,c], N3=[d], W3=[a|W13].
 begin loop 13, mizug([b,c], [d], W13).
 loop 13, line 4, X13=[b], Y13=[c], N13=[d], W13=[b|W14].
 begin loop 14, mizug([c], [d], W14).
 loop 14, line 4, X14=c, Y14=[], N14=[d], W14=[c|W15].
 begin loop 15, mizug([], [d], W15).
 loop 15, line 3, W15=[d].
 loop 14, W14=[c,d].
 loop 13, W13=[b,c,d].
 loop 3, W3=[a,b,c,d].
 ↑ print S=[a,b,c,d].

טור אחד של מבחן מועד ב התשס"א

שאלה 1 (10 נקודות).

יהי נתון הקשר \uparrow המוגדר על ידי $(p \wedge q) \rightarrow \neg p$. בטא באמצעותו את קשר הגרירה.

שאלה 2 (14 נקודות).

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו- B ויחס דו מקומי D . לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U . תן נמוק קצר לקביעתך:

- $\forall x \exists y [(A(y) \wedge B(y)) \wedge D(x, y)]$.
- $\forall x \forall y [D(x, y) \rightarrow (\exists z (B(z) \wedge D(x, z)))]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(D(x, y) \wedge (\neg D(y, z))) \rightarrow D(x, z)]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(\neg D(x, y) \wedge (\neg D(y, z))) \rightarrow (\neg D(x, z))]$.
- $\forall x \forall y [(A(x) \wedge A(y)) \rightarrow D(x, y)]$.
- $\forall x \forall y [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(x, y)]$.

$U=Z, D=\{(x,y) \in R^2, x-y \text{ zugi}\}, A=\{x \in U, x \text{ izugi}\},$
 $B=\{x \in U, x > 10\}.$

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge S(y)) \rightarrow S(x)].$
 2. $\forall x \forall y [(S(x) \wedge S(y)) \rightarrow (\neg R(x,y))].$
 3. $\exists x [R(x,x)].$
-
4. $\forall x \forall y \forall z [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)].$

שאלה 4 -12 נקודות .

לפניך טעון בשפת תחשיב היחסים. אם הוא תקף, הבא הוכחה מלאה לתקפותו, ובאם איננו תקף, הוכח את אי תקפותו על ידי מציאת מודל מתאים.

.א

1. $\exists y [S(y) \wedge \forall x [R(x,y) \rightarrow T(x)]].$
2. $\exists y [S(y) \wedge \forall x [A(x) \rightarrow R(x,y)]].$
3. $\forall x [A(x) \rightarrow T(x)]$
4. $\forall x \forall y [(S(x) \wedge S(y)) \rightarrow (x=y)].$

-
5. $\forall x [A(x) \leftrightarrow T(x)].$

שאלה 5 (12 נקודות כל סעיף)

לפניך שתי מערכות של טענות. לגבי כל מערכת, החלט אם היא ספיקה, ואז תן מודל המקים אותה, או בלתי ספיקה, ואז הוכח כי נובעת ממנה סתירה לוגית.

.א

1. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge S(y)) \rightarrow S(x)].$
2. $\forall x \forall y [(S(x) \wedge S(y)) \rightarrow (\neg R(x,y))].$
3. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)].$
4. $\exists x [S(x)].$
5. $\exists x [R(x,x)].$

.ב

-
1. $\forall x \forall y [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow C(y)].$
 2. $\forall x \forall y [(A(x) \wedge C(y)) \rightarrow D(x)].$
 3. $\exists x [S(x) \wedge (\neg D(x))].$
 4. $\exists x [B(x)].$

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $zugi(X,Y)$, אשר בו X ו- Y הן רשימות סדורות לא ריקות, המצליח אם Y היא רשימת האיברים של X המופיעים במקומות הזוגיים. דוגמאות ריצה:

?-zugi([a,b,c,d,e],S).
 S=[b,d].

שאלה 7 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $miun(X,Y)$, אשר בו X,Y הן רשימות סדורות לא ריקות של מספרים שלמים, המצליח אם ב- Y מופיעים אברי X בסדר עולה. דוגמאת ריצה:

?-miun([2,1,3,1],S).
S=[1,1,2,3].

שאלה 8 (10 נקודות)

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, $ms(X,Y)$.

```
-----begin code-----  
ms([X],[X|L],L).  
ms([X],[Y|L],[Y|M]):-X\=Y,ms([X],L,M).  
ms([X,Y|L],M,N):-ms([Y|L],M,K),ms([X],K,N).  
-----end code-----
```

ונתונה השאילתא

?-ms([a,b,c],[c,d,e],S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

טור שני של מבחן מועד ב התשס"א

שאלה 1 (10 נקודות).

יהי נתון הקשר \downarrow המוגדר על ידי $(p \downarrow q) = \neg(p \vee q)$. בטא באמצעותו את קשר הגרירה.

שאלה 2 (14 נקודות).

כמו בטור הקודם.

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge S(x)) \rightarrow S(y)]$.
 2. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$.
 3. $\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$.
-
4. $\forall x \forall y [(S(x) \wedge S(y)) \rightarrow (\neg R(x,y))]$.

שאלה 4 (12 נקודות) כמו הטור הקודם.

שאלה 5 (12 נקודות כל סעיף) כמו הטור הקודם.

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $izugi(X,Y)$ אשר בו X ו- Y הן רשימות סדורות לא ריקות, המצליח אם Y היא רשימת האיברים של X המופיעים במקומות האי-זוגיים. דוגמאות ריצה:

?-izugi([a,b,c,d,e],S).
S=[a,c,e].

שאלה 7 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $miun(X,Y)$ אשר בו X,Y הן רשימות סדורות לא ריקות של מספרים שלמים, המצליח אם ב- Y מופיעים אברי X בסדר יורד. דוגמאת ריצה:

?-miun([2,1,3,1],S).
S=[3,2,1,1].

שאלה 8 (10 נקודות)

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, $ms(X,Y)$.

```
-----begin code-----
ms([X],[X|L],L).
ms([X],[Y|L],[Y|M]):-X=Y,ms([X],L,M).
ms([X,Y|L],M,N):-ms([Y|L],M,K),ms([X],K,N).
```

-----end code-----

ונתונה השאילתא

?-ms([a,b,c,d],[d,e],S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

חוקי 0 ו 1 -

לכל טענה p , $0 \vee p = p$. 1 $1 \wedge p = p$. 2 $0 \wedge p = 0$. 5 $1 \vee p = 1$. 6 $\neg 1 = 0$. 4 $\neg 0 = 1$. 3

חוקי אידמפוטנציה

לכל טענה p , $p \vee p = p$. 7 $p \wedge p = p$. 8

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקים

$$p \wedge (\neg p) = 0 \quad .11 \quad p \vee (\neg p) = 1 \quad .10 \quad \neg(\neg(p)) = p \quad .9$$

חוקי פלוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q, r מתקים

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad .13 \quad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad .12$$

חוקי קבוץ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q, r מתקים

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r \quad .15 \quad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r \quad .14$$

חוקי חלוף (קומוטטיביות)

לכל טענות p, q מתקים

$$p \wedge q = q \wedge p \quad .17 \quad p \vee q = q \vee p \quad .16$$

חוקי דה-מורגן

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q) \quad .19 \quad \neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q) \quad .18$$

כלל 20 modus ponens $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

כלל 21 modus tollens $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \rightarrow (\neg p)$

כלל 22 טרנזיטיביות $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

כלל 23 כללי הפרוט $p \wedge q \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow p$

כלל 24 כלל הקונטרפוזיציה $((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

כלל 25 כלל cut $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$

כלל 26 כלל אקספורטציה $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

כלל 27 הגדרת גרירה $[(\neg p) \vee q] \leftrightarrow [p \rightarrow q]$

כלל 28 הגדרת שקילות $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

כלל 29 הגדרת שקילות $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))]$

כלל 30 עקרון הרזולוציה $[(a \vee b) \wedge ((\neg a) \vee c)] \rightarrow (b \vee c)$

כלל 31 $[(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c))$

חוקי פרדיקטים:

$US(x/t)$ מותר להסיק מהפסוק $\forall xA(x)$ את הפסוק $A(t)$, בתנאי ש- t קבוע כלשהוא, או שהוא משתנה כך שהצבתו ב- A איננה מקלקלת אף הופעה חפשית.

$UG(x)$ מהפסוק $A(x)$ שבו כל ההופעות של x חפשיות, נובע הפסוק $\forall xA(x)$.

$EP(x/a)$ מהפסוק $\exists xA(x)$ נובע הפסוק $A(b)$. כדי שהמסקנה תהיה תקפה במקרה הכללי ביותר, על הקבוע b להיות חדש בשפה.

EG מהפסוק A(b) נובע הפסוק $\exists x A(x)$.

מכללת נתניה- לוגיקה ותכנות לוגי- אביב התשס"ב

מורה: גיורא דולה.

מועד א- יום ב ז תמוז 17-6-2002 שעה 9:00

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט מחשבונים ודפים המצרפים לשאלון.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. תורדנה נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב. האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך ולהתלונן שבגלל התשובה שלי נכתבה תשובה שגויה. בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר אם הפתוח מספיק.

בזמן המבחן זכור כי שאר חבריך לשכבה רוצים לראות אותי במהלך המבחן ונסה לקצר בשאלותיך. בכל כיתה שאבקר, לא אשהה יותר מ- 15 דקות.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

בהצלחה.

חוקי 0 ו-1

$$\neg 1=0 \quad \neg 0=1 \quad 1 \wedge p=p \quad 0 \vee p=p \quad 1 \vee p=1 \quad 0 \wedge p=0$$

חוקי אידמפוטנציה

$$p \wedge p=p \quad p \vee p=p$$

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקים

$$p \wedge (\neg p)=0 \quad p \vee (\neg p)=1 \quad \neg(\neg(p))=p$$

חוקי פלוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

$$p \vee (q \wedge r)=(p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r)=(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

חוקי קבוץ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

$$p \wedge (q \wedge r)=(p \wedge q) \wedge r \quad p \vee (q \vee r)=(p \vee q) \vee r$$

חוקי חלוף (קומוטטיביות)

לכל טענות p ו- q מתקים

$$p \wedge q=q \wedge p \quad p \vee q=q \vee p$$

חוקי דה-מורגן

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q) . 19 \quad \neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q) . 18$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q \text{ modus ponens – 20 כלל}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \rightarrow (\neg p) \text{ modus tolens – 21 כלל}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \text{ טרנזיטיביות 22 כלל}$$

$$p \wedge q \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow p \text{ כללי הפרוט 23 כלל}$$

$$((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \text{ כלל הקונטרפוזיציה 24 כלל}$$

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q \text{ cut כלל 25 כלל}$$

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \text{ כלל אקספורטציה 26 כלל}$$

$$[(\neg p) \vee q] \leftrightarrow [p \rightarrow q] \text{ הגדרת גרירה 27 כלל}$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \text{ הגדרת שקילות 28 כלל}$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))] \text{ הגדרת שקילות 29 כלל}$$

כלל 30 עקרון הרזולוציה $[(a \vee b) \wedge ((\neg a) \vee c)] \rightarrow (b \vee c)$

כלל 31 $[(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c))$

חוקי פרדיקטים:

$US(x/t)$ מותר להסיק מהפסוק $\forall xA(x)$ את הפסוק $A(t)$, בתנאי ש- t קבוע כלשהוא, או שהוא משתנה כך שהצבתו ב- A איננה מקלקלת אף הופעה חפשית.

$UG(x)$ מהפסוק $A(x)$ שבו כל ההופעות של x חפשיות, נובע הפסוק $\forall xA(x)$.

$EP(x/a)$ מהפסוק $\exists xA(x)$ נובע הפסוק $A(b)$. כדי שהמסקנה תהיה תקפה במקרה הכללי ביותר, על הקבוע b להיות חדש בשפה.

EG מהפסוק $A(b)$ נובע הפסוק $\exists xA(x)$.

מכללת נתניה - לוגיקה ותכנות לוגי-אביב התשס"ב

מורה: גיורא דולה.

מועד א- יום ב ז תמוז 17-6-2002 שעה 9:00

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט מחשבוני ודפים המצרפים לשאלון.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. תורדנה נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב. האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך ולהתלונן שבגלל התשובה שלי נכתבה תשובה שגויה. בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר אם הפתוח מספיק.

בזמן המבחן זכור כי שאר חבריך לשכבה רוצים לראות אותי במהלך המבחן ונסה לקצר בשאלותיך. בכל כיתה שאבקר, לא אשהה יותר מ-15 דקות.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

במבחן 10 שאלות.
שאלות 1,2,3 הן שאלות חובה.
ענה על שלש מתוך: שלש הסעיפים של שאלה 4, ו- שאלות 8,9. לכל אחת משקל זהה של 12 נקודות.
ענה על שלש מתוך השאלות 5,6,7,10. לכל אחת משקל זהה של 10 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1 (10 נקודות).

עבור הטעון הבא, בדק על ידי טבלת אמת באם הוא תקף. אם כן, מצא לו הוכחה פורמלית:

1. $p \rightarrow q$.
2. $q \rightarrow (r \wedge s)$.

3. $s \rightarrow p$.

$p \leftrightarrow r$.

תשובה: השורה בה $p=q=s=0, r=1$ מראה כי הטעון אינו תקף.

שאלה 2 (14 נקודות)

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו- B ויחס דו מקומי D . לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U . תן נמוק קצר לקביעתך:

- $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
- $\forall x \forall y [D(x,y) \rightarrow (\exists z (B(z) \wedge D(x,z)))]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow D(x,z)]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(\neg D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
- $\exists x \forall y [D(x,y)]$.
- $\forall x \forall y [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(x,y)]$.

$U=Q$, $D=\{(x,y) \in Q^2, x>y\}$, $A=\{x \in U, x \in Z\}$, $B=\{x \in U, x \in N\}$.

תשובות:

בכל מקרה של גרירה מספיק לבדוק האם $1 \rightarrow 1$ או $1 \rightarrow 0$.

- true: $x>y>z \rightarrow x>z$.
- not true: contra-example: $x=0>y=-1$.
אין z טבעי כך ש- x גדול ממנו.
- not true: contra-example: $x=2, y=1, z=3$.
- true: $x \geq y \geq z \rightarrow x \geq z$.
- not true. Contra example: For all x , choose $y = x+1$.
- not true. Contra example: $x=0, y=2$.

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \forall y \forall z [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$.

2. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow (x=y)]$.

3. $\forall x (R(x,x))$.

4. $\exists x \forall y [R(y,x)]$.

תשובה:

כל יחס סדר חלקי ללא אבר מקסימלי, למשל קבוצת הטבעיים עם יחס הסדר הרגיל.

שאלה 4 (3X12) .

לפניך שלשה טעונים בשפת תחשיב היחסים. לגבי כל טעון, אם הוא תקף, הבא הוכחה מלאה לתקפותו, ובאם איננו תקף, הוכח את אי תקפותו על ידי מציאת מודל מתאים.

.א

1. $\forall x \forall y ([P(x) \wedge Q(y)] \rightarrow (R(x) \wedge S(y)))$.

2. $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$.

3. $\forall x (Q(x) \rightarrow S(x))$.

$\forall x (R(x) \rightarrow S(x))$.

מודל נגדי: $U=\{a\}, P=R=\{a\}, Q=S=\emptyset$

.ב

1. $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$.
 2. $\forall x \forall y (Q(x,y) \rightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y)))$.
 3. $\forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow P(x,y))$.
-
- $\forall x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow R(x,y))$.

מודל נגדי: $U=\{a\}$, $R=\{(a,a)\}$, $P=Q=S=\emptyset$

.ג

1. $\exists x \exists y \forall z [P(x,y,z)]$.
 2. $(\exists x \exists y \exists z [[P(x,y,z) \rightarrow A(z)] \rightarrow [P(x,y,z) \wedge B(z)]] \rightarrow (\forall x \forall y \exists z [\neg (P(x,y,z))]))$.
-
3. $\neg (\exists x [A(x) \rightarrow B(x)])$.

תשובה:

4. $\neg (\exists x \exists y \exists z [[P(x,y,z) \rightarrow A(z)] \rightarrow [P(x,y,z) \wedge B(z)]]), 1,2,MT$.
5. $\forall x \forall y \forall z (\neg [[P(x,y,z) \rightarrow A(z)] \rightarrow [P(x,y,z) \wedge B(z)]]), 4, D-M$.
6. $\forall x \forall y \forall z ([[P(x,y,z) \rightarrow A(z)] \wedge (\neg [P(x,y,z) \wedge B(z)])]), 5, D-M$.
7. $\forall x \forall y \forall z ([(\neg [P(x,y,z)]) \vee A(z)] \wedge (\neg [P(x,y,z)] \vee (\neg B(z)))], 6, DM, (27)$.
8. $\forall x \forall y \forall z ([(\neg [P(x,y,z)]) \vee (A(z) \wedge (\neg B(z)))]), 7, dist$.
9. $\forall x \forall y \forall z (P(x,y,z) \rightarrow (A(z) \wedge (\neg B(z))), 8, (27)$.
10. $\exists y \forall z [P(a,y,z)], 1, EP(x/a)$.
11. $\forall z [P(a,b,z)], 10, EP(y/b)$.
12. $P(a,b,z), 11, US(z/z)$.
13. $\forall y \forall z (P(a,y,z) \rightarrow (A(z) \wedge (\neg B(z))), 9, US(x/a)$.
14. $\forall z (P(a,b,z) \rightarrow (A(z) \wedge (\neg B(z))), 13, US(y/b)$.
15. $P(a,b,z) \rightarrow (A(x) \wedge (\neg B(x))), 14, US(z/x)$.
16. $A(x) \wedge (\neg B(x)), 12, 15, MP$.
17. $\forall x [A(x) \wedge (\neg B(x))], 16, UG$.

18. $\neg (\neg (\forall x [A(x) \wedge (\neg B(x))]))$, 17,(9).
 19. $\neg (\exists x [(\neg A(x)) \vee (B(x))])$, 18,DM.
 20. $\neg (\exists x [A(x) \rightarrow B(x)])$, 19,DM.

שאלה 5 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog $sz(X,Y)$ שבו X היא רשימת קלט סדורה של מספרים שלמים, ו- Y הוא סכום האיברים המופיעים במקומות הזוגיים. מותר להשתמש בכל קוד שרשמנו בכתה מבלי לפרט, אך אסור להשתמש בפונקציות ספריה. דוגמת ריצה:

?-sz([1,2,3,4],Y).
 Y=6.

תשובה:

```
-----code of sz(X,Y)-----
sz([],0).
sz([X],0).
sz([X,Y|Z],S):-sz(Z,T), S is T+Y.
-----end code sz-----
```

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog $\text{schum}(X,Y,Z)$ שבו X,Y הן רשימת קלט סדורות של מספרים שלמים, ו- Z היא רשימת פלט סדורה של מספרים שלמים, אשר כוללת את כל הסכומים של כל זוגות האיברים ב- X וב- Y . מותר להשתמש בכל קוד שרשמנו בכתה מבלי לפרט, אך אסור להשתמש בפונקציות ספריה. דוגמת ריצה:

```
?-schum([1,2],[3,4,5],S).  
S=[4,5,6,5,6,7].
```

תשובה:

```
-----code of schum-----  
schum([],S,[]).  
schum([X|Y],S,T):- schum(Y,S,U),hibur(X,S,V),mizug(V,U,T).  
hibur(X,[],[]).  
hibur(X,[Y|Z],[A|B]):- A is X+Y, hibur(X,Z,B).  
mizug([],S,S).
```

```
mizug([X|Y],S,[X|T]):-mizug(Y,S,T).
-----end code schum-----
```

שאלה 7 (10 נקודות)

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, $a(X,Y)$.

```
-----begin code-----
a([X],[X]).
a([X|Y],Z):-a(Y,W),b(X,W,Z).
b(X,[],[X]).
b(X,[Y|Z],[X,Y|Z]):-X=<Y.
b(X,[Y|Z],[Y|W]):-Y<X, b(X,Z,W).
-----end code-----
```

ונתונה השאילתא

?-a([0,3,2,1],S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

```

?-a([0,3,2,1],S).
begin loop 1, a([0,3,2,1],S1).
line 2, X1=0, Y1=[3,2,1].
begin loop 2, a([3,2,1],T2).
begin loop 3, b(0,T2,S3), S3=S1.
loop 2, line 2, X2=3, Y2=[2,1].
begin loop 4, a([2,1],T4).
begin loop 5, b(3,T4,S5), S5=T2.
loop 4, line 2, X4=2, Y4=[1].
begin loop 6, a([1],T6).
begin loop 7, b(2,T6,S7), S7=T4.
loop 6, line 1, T6=[1].
continue loop 7, b(2,[1],S7).
loop 7, line 5, X7=2, Y7=1, Z7=[],S7=[1|S8].
begin loop 8, b(2,[],S8).
loop 8, line 3, S8=[2].
loop 7, S7=[1,2].
loop 4, T4=S7=[1,2].
continue loop 5, b(3,[1,2],S5).
loop 5, line 5, X5=3, Y5=1, Z5=[2], S5=[1|S9].
begin loop 9, b(3,[2],S9).
loop 9, line 5, X9=3, Y9=2, Z9=[], S9=[2|S10].
begin loop 10, b(3,[],S10).
loop 10, line 3, S10=[3].
loop 9, S9=[2,3].
loop 5, S5=[1,2,3].
loop 2, T2=[1,2,3].
continue loop 3, b(0,[1,2,3],S3).
loop 3, line 4, S3=[0,1,2,3].
loop 1, S1=[0,1,2,3].
print S=[0,1,2,3].

```

שאלה 8

בטא את הקשר nand (\uparrow) על ידי הקשר nor (\downarrow). פרט את כל החשובים.

תשובה:

$$\begin{aligned}(a \uparrow b) &\equiv \neg(a \wedge b) \equiv ((\neg a) \vee (\neg b)) \equiv \neg[\neg((a \downarrow a) \vee (b \downarrow b))] \\ &\equiv \neg[(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)] \equiv [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)] \downarrow [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)]\end{aligned}$$

שאלה 9.

מצא את צורת ה-dnf ואת צורת ה-cnf של הבטוי הבא, x. פרט את כל השלבים. $x = (((a \downarrow b) \uparrow c) \downarrow d) \vee (((a \uparrow b) \downarrow c) \uparrow d)$

תשובה:

$$(((a \downarrow b) \uparrow c) \downarrow d) \equiv \neg(\neg((\neg(a \vee b)) \wedge c) \vee d) \equiv (\neg(a \vee b)) \wedge c \wedge (\neg d) \equiv (\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c \wedge (\neg d).$$

$$(((a \uparrow b) \downarrow c) \uparrow d) \equiv \neg(\neg((\neg(a \wedge b)) \vee c) \wedge d) \equiv (\neg(a \wedge b)) \vee c \vee (\neg d) \equiv (\neg a) \vee (\neg b) \vee c \vee (\neg d)$$

הבטוי השני הוא בעל אחד יחיד אשר כלול באחדים של המקרה השני. לכן ה-dnf של הבטוי הוא כמו של הבטוי השני, וזהו אחוד של 15 מחוברים, כמעט כל ה-16, למעט המחובר הבא, או:

$$\text{dnf}(\neg x) = a \wedge b \wedge (\neg c) \wedge d.$$

ונקבל גם את צורת ה-cnf

$$\text{cnf}(x) = (\neg a) \vee (\neg b) \vee c \vee (\neg d)$$

שאלה 10

האם נתן על ידי הקשרים \vee ו- \wedge , תוך שמוש בשני אטומים בדיוק p, q, לבטא את הקשר \neg ? אם כן- בטא, ואם לא תן נמוק קצר.

תשובה: אי אפשר כי בשורות של טבלת האמת שבהן p, q בעלי ערכי אמת זהים, אז התוצאה של כל קשר כזה תהיה אותו ערך אמת. ניתן להוכיח זאת על ידי אינדוקציה על ארך העץ. אך בקשר \neg , מתבצע חלוף של ערכי האמת.

$$\neg 1=0 \quad \neg 0=1 \quad .1 \wedge p=p \quad .2 \quad 0 \vee p=p \quad .1 \quad \text{לכל טענה } p, \\ 1 \vee p=1 \quad .6 \quad 0 \wedge p=0 \quad .5$$

חוקי אידמפוטנציה

$$p \wedge p=p \quad .8 \quad p \vee p=p \quad .7 \quad \text{לכל טענה } p,$$

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקים

$$p \wedge (\neg p)=0 \quad .11 \quad p \vee (\neg p)=1 \quad .10 \quad \neg (\neg p)=p \quad .9$$

חוקי פלוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

$$p \vee (q \wedge r)=(p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad .13 \quad p \wedge (q \vee r)=(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad .12$$

חוקי קבוץ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

$$p \wedge (q \wedge r)=(p \wedge q) \wedge r \quad .15 \quad p \vee (q \vee r)=(p \vee q) \vee r \quad .14$$

חוקי חלוף (קומוטטיביות)

לכל טענות p ו- q מתקים

$$p \wedge q=q \wedge p \quad .17 \quad p \vee q=q \vee p \quad .16$$

חוקי דה-מורגן

$$\neg (p \wedge q)=(\neg p) \vee (\neg q) \quad .19 \quad \neg (p \vee q)=(\neg p) \wedge (\neg q) \quad .18$$

כלל 20 – modus ponens $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

כלל 21 – modus tolens $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \rightarrow (\neg p)$

כלל 22 טרנזיטיביות $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

כלל 23 כללי הפרוט $p \wedge q \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow p$

כלל 24 כלל הקונטרפוזיציה $((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

כלל 25 cut $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$

כלל 26 כלל אקספורטציה $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

כלל 27 הגדרת גרירה $[(\neg p) \vee q] \leftrightarrow [p \rightarrow q]$

כלל 28 הגדרת שקילות $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

כלל 29 הגדרת שקילות $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))]$

כלל 30 עקרון הרזולוציה $[(a \vee b) \wedge ((\neg a) \vee c)] \rightarrow (b \vee c)$

כלל 31 כלל $[(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c))$

חוקי פרדיקטים:

$US(x/t)$ מותר להסיק מהפסוק $\forall xA(x)$ את הפסוק $A(t)$, בתנאי ש- t קבוע כלשהוא, או שהוא משתנה כך שהצבתו ב- A איננה מקלקלת אף הופעה חפשית.

$UG(x)$ מהפסוק $A(x)$ שבו כל ההופעות של x חפשיות, נובע הפסוק $\forall xA(x)$.

$EP(x/a)$ מהפסוק $\exists xA(x)$ נובע הפסוק $A(b)$. כדי שהמסקנה תהיה תקפה במקרה הכללי ביותר, על הקבוע b להיות חדש בשפה.

EG מהפסוק $A(b)$ נובע הפסוק $\exists xA(x)$.

מכללת נתניה- לוגיקה ותכנות לוגי- אביב התשס"ב

מורה: גיורא דולה.

מועד א- יום ב ז תמוז 17-6-2002 שעה 9:00

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט מחשבוני ודפים המצרפים לשאלון.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. תורדנה נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב. האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך ולהתלונן שבגלל התשובה שלי נכתבה תשובה שגויה. בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר אם הפתוח מספיק.

בזמן המבחן זכור כי שאר חבריך לשכבה רוצים לראות אותי במהלך

המבחן ונסה לקצר בשאלותיך. בכל כיתה שאבקר, לא אשהה יותר מ-15 דקות.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

במבחן 10 שאלות.

שאלות 1,2,3 הן שאלות חובה.

ענה על שלש מתוך: שלש הסעיפים של שאלה 4, ו- שאלות 8,9. לכל אחת משקל זהה של 12 נקודות.

ענה על שלש מתוך השאלות 5,6,7,10. לכל אחת משקל זהה של 10 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1 (10 נקודות).

עבור הטעון הבא, בדק על ידי טבלת אמת באם הוא תקף. אם כן, מצא לו הוכחה פורמלית:

1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$.

2. $p \rightarrow r$.

3. $q \rightarrow s$.

$r \rightarrow s$.

תשובה: השורה בה $p=r=1, q=s=0$ מראה כי הטעון אינו תקף.

שאלה 2 (14 נקודות)

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו- B ויחס דו מקומי D . לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U . תן נמוק קצר לקביעתך:

- $\forall x \forall y [D(x,y) \rightarrow (\exists z (B(z) \wedge D(x,z)))]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(\neg D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
- $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow D(x,z)]$.
- $\forall x \forall y [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(x,y)]$.

$$f. \exists x \forall y [D(x,y)].$$

$$U=Q, D=\{(x,y) \in Q^2, x>y\}, A=\{x \in U, x \in Z\}, B=\{x \in U, x \in N\}.$$

תשובות:

שאלה 2 כמו שאלה 2 בטור הקודם אך בשנוי סדר הסעיפים.

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \forall y \forall z [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)].$
2. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow (x=y)].$
3. $\forall x (R(x,x)).$

4. $\exists x \forall y [R(x,y)].$

תשובה:

כל קבוצה סדורה, חסרת אבר מינימלי, למשל השלמים עם יחס הסדר הרגיל.

שאלה 4 (3X12) .

לפניך שלשה טעונים בשפת תחשיב היחסים. לגבי כל טעון, אם הוא תקף, הבא הוכחה מלאה לתקפותו, ובאם איננו תקף, הוכח את אי תקפותו על ידי מציאת מודל מתאים.

.א

1. $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$.
 2. $\forall x \forall y (Q(x,y) \rightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y)))$.
 3. $\forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow P(x,y))$.
-
- $\forall x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow R(x,y))$.

מודל נגדי: $U=\{a\}, R=\{(a,a)\}, P=Q=S=\emptyset$

.ב

1. $\forall x \forall y ([P(x) \wedge Q(y)] \rightarrow (R(x) \wedge S(y)))$.

2. $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$.

3. $\forall x (Q(x) \rightarrow S(x))$.

$\forall x (R(x) \rightarrow S(x))$.

מודל נגדי: $U=\{a\}, P=R=\{a\}, Q=S=\emptyset$

1. $\exists x \exists y \forall z [P(x,y,z)]$.
 2. $(\exists x \exists y \exists z [(P(x,y,z) \rightarrow A(z)) \rightarrow [P(x,y,z) \wedge B(z)]] \rightarrow (\forall x \forall y \exists z [\neg (P(x,y,z))]))$.
-
3. $\neg (\exists x [A(x) \rightarrow B(x)])$.

תשובה:

4. $\neg (\exists x \exists y \exists z [(P(x,y,z) \rightarrow A(z)) \rightarrow [P(x,y,z) \wedge B(z)]])$, 1,2,MT.
5. $\forall x \forall y \forall z (\neg [(P(x,y,z) \rightarrow A(z)) \rightarrow [P(x,y,z) \wedge B(z)]])$, 4, D-M.
6. $\forall x \forall y \forall z ([(P(x,y,z) \rightarrow A(z)) \wedge (\neg [P(x,y,z) \wedge B(z)])])$, 5, D-M.
7. $\forall x \forall y \forall z ([(\neg [P(x,y,z)]) \vee A(z)] \wedge (\neg [P(x,y,z)] \vee (\neg B(z)))$),6,DM,(27).
8. $\forall x \forall y \forall z ([(\neg [P(x,y,z)]) \vee (A(z) \wedge (\neg B(z)))])$, 7, dist.
9. $\forall x \forall y \forall z (P(x,y,z) \rightarrow (A(z) \wedge (\neg B(z))))$,8,(27).
10. $\exists y \forall z [P(a,y,z)]$, 1,EP(x/a).
11. $\forall z [P(a,b,z)]$, 10,EP(y/b).
12. $P(a,b,z)$, 11,US(z/z).
13. $\forall y \forall z (P(a,y,z) \rightarrow (A(z) \wedge (\neg B(z))))$, 9, US(x/a).
14. $\forall z (P(a,b,z) \rightarrow (A(z) \wedge (\neg B(z))))$, 13, US(y/b).
15. $P(a,b,z) \rightarrow (A(x) \wedge (\neg B(x)))$, 14, US(z/x).
16. $A(x) \wedge (\neg B(x))$, 12,15,MP.
17. $\forall x [A(x) \wedge (\neg B(x))]$, 16, UG.
18. $\neg (\neg (\forall x [A(x) \wedge (\neg B(x))]))$, 17,(9).
19. $\neg (\exists x [(\neg A(x)) \vee (\neg B(x))])$, 18,DM.
20. $\neg (\exists x [A(x) \rightarrow B(x)])$, 19,DM.

שאלה 5 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $siz(X, Y)$ שבו X היא רשימת קלט סדורה של מספרים שלמים, ו- Y הוא סכום האיברים המופיעים במקומות האי-זוגיים. מותר להשתמש בכל קוד שרשמנו בכתה מבלי לפרט, אך אסור להשתמש בפונקציות ספריה. דוגמת ריצה:

?-siz([1,2,3],Y).

Y=4.

תשובה:

```
-----code of siz(X, Y)-----  
siz([],0).  
siz([X],S):- S is X.  
siz([X, Y|Z],S):-siz(Z,T), S is T+X.  
-----end code sz-----
```

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, $\text{hefresh}(X,Y,Z)$ שבו X,Y הן רשימת קלט סדורות של מספרים שלמים, ו- Z היא רשימת פלט סדורה של מספרים שלמים, אשר כוללת את כל ההפרשים של כל הזוגות, כל האיברים ב- X פחות כל האיברים ב- Y . מותר להשתמש בכל קוד שרשמנו בכתה מבלי לפרט, אך אסור להשתמש בפונקציות ספריה. דוגמת ריצה:

$\text{?-hefresh}([1,2],[3,4,5],S)$.

$S=[-2,-3,-4,-1,-2,-3]$.

תשובה:

```
-----code of hefresh-----  
hefresh(S,[],[]).  
hefresh([X|S],Y,T):-  
hefresh(S,Y,U),hisur(X,Y,V),mizug(V.U,T).  
hisur(X,[],[]).  
hisur(X,[Y|Z],[A|B]):- A is X-Y, hisur(X,Z,B).  
mizug([],S,S).  
mizug([X|Y],S,[X|T]):-mizug(Y,S,T).  
-----end code hefresh-----
```

שאלה 7 (10 נקודות)
נתון הקוד הבא בשפת Prolog, $a(X,Y)$.

```
-----begin code-----  
a([X],[X]).  
a([X|Y],Z):-a(Y,W),b(X,W,Z).  
b(X,[],[X]).  
b(X,[Y|Z],[X,Y|Z]):-X=<Y.  
b(X,[Y|Z],[Y|W]):-Y<X, b(X,Z,W).  
-----end code-----
```

ונתונה השאילתא

?-a([1,4,3,2],S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

תשובה

```
?-a([1,4,3,2],S).  
begin loop 1, a([1,4,3,2],S1).  
line 2, X1=1, Y1=[4,3,2].  
begin loop 2, a([4,3,2],T2).  
begin loop 3, b(1,T2,S3), S3=S1.  
loop 2, line 2, X2=4, Y2=[3,2].  
begin loop 4, a([3,2],T4).  
begin loop 5, b(4,T4,S5), S5=T2.
```

loop 4, line 2, X4=3, Y4=[2].
begin loop 6, a([2],T6).
begin loop 7, b(3,T6,S7), S7=T4.
loop 6, line 1, T6=[2].
continue loop 7, b(3,[2],S7).
loop 7, line 5, X7=3, Y7=2, Z7=[],S7=[2|S8].
begin loop 8, b(3,[],S8).
loop 8, line 3, S8=[3].
loop 7, S7=[2,3].
loop 4, T4=S7=[2,3].
continue loop 5, b(4,[2,3],S5).
loop 5, line 5, X5=4, Y5=2, Z5=[3], S5=[2|S9].
begin loop 9, b(4,[3],S9).
loop 9, line 5, X9=4, Y9=3, Z9=[], S9=[3|S10].
begin loop 10, b(4,[],S10).
loop 10, line 3, S10=[4].
loop 9, S9=[3,4].
loop 5, S5=[2,3,4].
loop 2, T2=[2,3,4].
continue loop 3, b(1,[2,3,4],S3).
loop 3, line 4, S3=[1,2,3,4].
loop 1, S1=[1,2,3,4].
print S=[1,2,3,4].

שאלה 8

בטא את הקשר (\downarrow) nor על ידי הקשר (\uparrow) nand. פרט את כל החשובים.

תשובה:

$$(a \downarrow b) \equiv \neg(a \vee b) \equiv ((\neg a) \wedge (\neg b)) \equiv \neg[\neg((a \uparrow a) \wedge (b \uparrow b))] \equiv \neg[(a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)] \equiv [(a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)] \uparrow [(a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)].$$

שאלה 9

מצא את צורת ה-dnf ואת צורת ה-cnf של הבטוי הבא, x . פרט את כל השלבים.
$$x = (((b \downarrow c) \uparrow d) \downarrow a) \vee (((b \uparrow c) \downarrow d) \uparrow a)$$

תשובה:

הבטוי זהה לבטוי של תרגיל 9 בטור הקודם, למעט תמורה בין המשתנים. לכן:
 $dnf(\neg x) = a \wedge b \wedge c \wedge (\neg d)$.

ונקבל גם את צורת ה-cnf

$$cnf(x) = (\neg a) \vee (\neg b) \vee (\neg c) \vee d$$

שאלה 10

האם נתן על ידי הקשרים \vee ו- \wedge , תוך שמוש בשני אטומים בדיוק p, q , לבטא את הקשר $p \oplus q$ (קסור)? אם כן- בטא, ואם לא תן נמוק קצר.

תשובה: אי אפשר כי בשורות של טבלת האמת שבהן p, q בעלי ערכי אמת זהים, אז התוצאה של כל קשר כזה תהיה אותו ערך אמת. ניתן להוכיח זאת על ידי אינדוקציה על ארך העץ. אך בקשר $p \oplus q$, מתבצע חלוף של ערכי האמת.

