המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתו.

יום ג, ט אדר התש"ע 23-2-2009

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 6 שאלות.
- שאלות 1-3 חשוביות בטבען. משקלה של שאלה 1 20 נקודות ומשקלן של שאלות 2-3 25 נקודות כל אחת.
- שאלה 4 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלות 5-6 הן שאלות הבנה . משקל כל אחת 10 נקודות.

20+25*2+3*10=20+50+30=100

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

שאלה ראשונה (20 נקודות)

א. עבור המשואה $f(x)=x^3-8$ השתמש בנתונים $x_0=1,x_1=4$ ובשיטת המיתר וחשב את x_3.

ב. עבור המשואה $f(x)=x^3-8$ השתמש בנתונים $a_0=1,b_0=4$ ובשיטת החציה וחשב את a_3,b_3.

שאלה שניה (25 נקודות)

הבט בפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[0,1]$. בוצעה לה אינטגרציה נומרית בשתי שיטות: שיטת סכומי רימן עם n קטעים שווים ונקודות בינים בשמאל ושיטת הטרפז עם n קטעים שווים.

א. הערך את השגיאה (מצא חסם לשגיאה) בכל אחד מהשיטות כפונקציה של n.

ב. מצא N כך שלכל $n>N$ יתקיים כי הערכת השגיאה בשיטת הטרפז היא פחות מחצי מהערכת השגיאה בשיטת סכומי רימן.

שאלה שלישית (25 נקודות)

הבט בפונקציה $f(x)=x^3-8x^2+16x-4$.

א. מצא קטע $[a,b]$ שבו f מקיימת את תנאי המשפט בקשר לפתרון לפי שיטת ניוטון רפסון.
ג. חשב את x_2,x_1 .
ד. מהו n הקטן ביותר כך שהמרחק שבין x_n ובין השורש יהיה קטן מ-0.01?
ה. כתוב את השרש ברמת דיוק של 0.01.
ו. הערך את המרחק בין השרש ובין x_2.

שאלה רביעית (10 נקודות)

נסח והוכח את משפט נקודת השבת (אותו אחד מבין השנים שלמדנו אשר מתיחס לקבוע ליפשיץ).

שאלה חמישית (10 נקודות)

הבט בפונקציה $f(x)=x(x-3)^2-3$

א. כמה שרשים שונים יש לפונקציה?
ב. מצא קטע אשר מכיל את השרש הגדול ביותר מכל השרשים שלה.
ג. מצא 5 משואות נקודות שבת השקולות למשואה $f(x)=0$ בשיטות הבאות:

ג1. פתח את הנוסחא של $f(x)$, השאר את הבטוי היחיד שיש בו x^3 בצד אחד, ואז הוצא שרש שלישי.

ג2. פתח את הנוסחא של $f(x)$, השאר את הבטוי היחיד שיש בו x^2 בצד אחד, ואז הוצא שרש רבועי.

ג3. פתח את הנוסחא של $f(x)$ והשאר את הבטוי היחיד שיש בו x^1 בצד אחד.

ג4. העבר את הבטוי 3 לצד שני וחלק ב-$(x-3)^2$.

ג5. העבר את הבטוי 3 לצד שני חלק ב-x ואז הוצא שורש ואח"כ העבר עוד 3 לצד שני.

ד. נניח כי רוצים למצוא את השרש הגדול ביותר של f על ידי שיטת נקודת השבת. נניח כי משתמשים באותו ניחוש התחלתי קרוב לשורש עבור כל אחת מהפונקציות שנמצאו בסעיף ג. מי מ5 הפונקציות שבסעיף ג תתן סדרה אשר תתכנס במהירות הגבוהה ביותר לשורש ומדוע?

שאלה שישית (10 נקודות)

א.תן דוגמא לשתי פונקציות רציפות f(x),g(x) בקטע [0,2] כך שלכל n מתקיים השויון הבא

$$\int_a^b f(x)dx - SRS(f,a,b,n) = \int_a^b g(x)dx - SRY(g,a,b,n)$$

כאשר $SRS(f,a,b,n)$ מסמן את סכום רימן עבור f המבוסס על n קטעים שווים ונקודות בינים בשמאל של כל תת קטע, ו $SRY(g,a,b,n)$ מסמן את סכום רימן עבורg המבוסס על n קטעים שווים ונקודות בינים בימין של כל תת קטע.

ב. הכלל את סעיף א עבור משפחה אינסופית של פונקציות.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b) - f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i}(x - a_j)}{\prod_{j \ne i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0) - (x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n|\le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \leq \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר M=supf'', m=inf f' בקטע [a,b] שבו f(a)f(b)<0 וגם f',f''>0.

תשובות

תשובה 1

$$f(x) = x^3 - 8, [a_0 = 1, b_0 = 4] \to c_0 = \frac{5}{2}, [a_1 = 1, b_1 = \frac{5}{2}], \to c_1 = \frac{7}{4}, [a_2 = \frac{7}{4}, b_2 = \frac{5}{2}], \to c_2 = \frac{17}{8}, [a_3 = \frac{7}{4}, b_3 = \frac{17}{8}].$$

$$f(x)=x^3-8, x_0=1, f(x_0)=-7, x_1=4, f(x_1)=56, \to x_2=\frac{f(x_0)x_1-f(x_1)x_0}{f(x_0)-f(x_1)}=\frac{(-7)4-56\cdot 1}{(-7)-56}=\frac{-84}{-63}=\frac{4}{3},$$

$$f(x_2)=\frac{-152}{27}, x_3=\frac{f(x_1)x_2-f(x_2)x_1}{f(x_1)-f(x_2)}=\frac{56\cdot\frac{4}{3}-(\frac{-152}{27})\cdot 4}{56-(\frac{-152}{27})}=\frac{2016+608}{1512+152}=\frac{2624}{1664}=\frac{41}{26}.$$

תשובה 2

$$f(x)=e^{x^2}, f'=2xf, f''=(2+4x^2)f,$$
$$f'''=(12x+8x^3)f.$$

בקטע [0,1] כל הפונקציות חיוביות, ולכן ''fעולה כי נגזרתה חיובית, ובאותו אופן 'f עולה, וגם f, ולכן חסמים לפונקציות הללו הן ערכיהן ב-x=1, ונקבל:

$$f(x)=e^{x^2}, M(f)=e, f'=2xf, M(f')=2e,$$
$$f''=(2+4x^2)f, M(f'')=6e.$$

ולכן:

$$E(SRS(n))=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}\le\frac{2e\cdot 1^2}{2n}=\frac{e}{n}$$

$$E(ST(n)) = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2} \le \frac{6e \cdot 1^2}{12n^2} = \frac{e}{2n^2}$$

ולכן:

$$\frac{e}{2n^2} \le 2\frac{e}{n} \to \frac{1}{4} \le n$$

תשובה 3

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 4 \to f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$$
$$f'(x) = (3x-4)(x-4) \to f''(x) = 6x - 16,$$
$$f''(x) > 0 \to x > 8/3.$$
$$(f'(x) > 0) \wedge (f''(x) > 0) \to x > 4.$$

כיון שהמשפט דורש לעסוק בקטע שבו f',f'' חיוביות, אז עלינו למצוא קטע המוכל בקרן $[4,\infty)$. כיון ש $f(4) < 0 < f(5)$ נבחר בקטע $[4,5]$.

כיון ש'' f' לינארית עולה אז הערך הקטן ביותר שלה בתחום הוא ערכה ב-4, וכיון ש'' f' נבחרה להיות בקטע שבו היא חיובית, אז גם f' עולה והערך הגדול ביותר שלה הוא ערכה ב-5 ולכן:

$$M = f'(5) = 75 - 80 + 16 = 11, m = f''(4) = 8,$$

$$\frac{M}{2m} = \frac{11}{16}.\frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2 < \varepsilon \to (x_{n+1} - x_n)^2 < \frac{16\varepsilon}{11}.$$

$$\varepsilon = 0.01 \to (x_{n+1} - x_n)^2 < \frac{16\varepsilon}{11} \approx 0.01455 \to$$

$$| x_{n+1} - x_n | < 0.1206$$

וכמו כן:

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 4, f(4) = -4, f(5) = 1$$

$$\to [a,b] = [4,5], x_0 = b = 5.$$

$$g = x - \frac{f}{f'} = x - \frac{x^3 - 8x^2 + 16x - 4}{3x^2 - 16x + 16} =$$

$$= \frac{x(3x^2 - 16x + 16) - (x^3 - 8x^2 + 16x - 4)}{3x^2 - 16x + 16} =$$

$$= \frac{2x^3 - 8x^2 + 4}{3x^2 - 16x + 16} = \frac{2(x^3 - 4x^2 + 2)}{3x^2 - 16x + 16} =$$

$$= \frac{2(xx(x-4) + 2)}{(3x - 16)x + 16}$$

ולכן:

$$g=\frac{2(x^3-4x^2+2)}{3x^2-16x+16}=\frac{2(xx(x-4)+2)}{(3x-16)x+16},x_0=5,$$

$$x_1=\frac{54}{11}\approx 4.91919,x_0-x_1=0.0909<0.12,$$

$$x_2=\frac{15911}{3245}\approx 4.90323,|x_2-L|\le\frac{11}{16}(x_2-x_1)^2=$$

$$=\frac{11}{16}(0.016)^2=0.000176<0.0002$$

תשובה 5

א. f(0)=f(3)=-3,f(1)=f(4)=1. לכן יש שרש בין 0 ו-1, יש שרש בין 1 ו-3,
ויש שרש בין 3 ו-4. לא יתכנו יותר מ-3 שרשים לפולינום ממעלה 3.

ב. מצאנו בסעיף הקודם כי השרש הגדול ביותר נמצא בין 3 ו-4.

ג. $f(x)=x(x-3)^2-3=x(x^2-6x+9)-3=x^3-6x^2+9x-3$

ג1.

$$x^3-6x^2+9x-3=0\to x^3=6x^2-9x+3\to x=g(x)=\sqrt[3]{6x^2-9x+3}$$

ג2.

$$x^3-6x^2+9x-3=0 \rightarrow 6x^2=x^3+9x-3 \rightarrow x=g(x)=\frac{\sqrt{x^3+9x-3}}{\sqrt{6}}$$

ג3.

$$x^3-6x^2+9x-3=0 \rightarrow 9x=6x^2+3-x^3 \rightarrow x=g(x)=\frac{6x^2+3-x^3}{9}$$

ג4.

$$x(x-3)^2-3=0 \rightarrow x(x-3)^2=3 \rightarrow x=g(x)=\frac{3}{(x-3)^2}$$

ג5.

$$x(x-3)^2-3=0 \rightarrow x(x-3)^2=3 \rightarrow (x-3)^2=\frac{3}{x} \rightarrow x-3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} \rightarrow$$
$$x=g(x)=3+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$$

ד. מה שיקבע את מהירות ההתכנסות הוא הערך המוחלט של ’g קרוב לשורש, ככל שהערך המוחלט קטן יותר ההתכנסות מהירה יותר. כיון שהשרש לא ידוע, יש להביט על הערך המוחלט בין הנקודות 3 ו-4, ובמקום לעשות חקירה (מדויקת) לאורך הקטע נסתפק בבחינת g’(3),g’(4) עבור כל אחת מ-5 ה- g ים השונים.

ד1.

$$g(x)=\sqrt[3]{6x^2-9x+3},\ g'(x)=\frac{12x-9}{3g^2}=\frac{4x-3}{g^2}=\frac{(4x-3)g}{g^3}.\ g'(3)=\frac{9\sqrt[3]{30}}{30}=\frac{3\sqrt[3]{30}}{10}\approx 0.9321,$$

$$g'(4)=\frac{39\sqrt[3]{63}}{3*63}=\frac{13\sqrt[3]{63}}{63}\approx 0.821$$

ד2.

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^3+9x-3}}{\sqrt{6}},\ g'(x)=\frac{3x^2+9}{2\sqrt{6}\sqrt{x^3+9x-3}}=\frac{(3x^2+9)\sqrt{6}\sqrt{x^3+9x-3}}{12(x^3+9x-3)},$$

$$g'(3)=\frac{36\sqrt{6}\sqrt{51}}{(12)51}=\frac{\sqrt{306}}{17}\approx 1.028,\ g'(4)=\frac{57\sqrt{6}\sqrt{97}}{(12)97}=\frac{19\sqrt{582}}{388}\approx 1.181$$

ד3.

$$g(x)=\frac{6x^2+3-x^3}{9},\ g'(x)=\frac{12x-3x^2}{9}=\frac{x(4-x)}{3},\ g'(3)=1,\ g'(4)=0$$

ד4.

$$g(x)=\frac{3}{(x-3)^2},\ g'(x)=\frac{-3}{(x-3)^3},\ g'(3)=\pm\infty,\ g'(4)=-3$$

ד5.

$$g(x)=3+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}},\ g'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}^3}=\frac{-\sqrt{3x}}{2x^2},\ g'(3)=\frac{-1}{6},\ g'(4)=\frac{-\sqrt{12}}{32}=\frac{-\sqrt{3}}{16}\approx -0.1082$$

לכן ג-5 הוא הטוב ביותר, השני באיכותו הוא ג-3 והשלישי הוא ג-1.

תשובה 6

סעיף א.

נביט בפונקציה f(x)=x,g(x)=2-x. הללו הן תמונות ראי זו של זו ביחס לציר x=1, (מן הכללה של מושג הזוגיות), ועל ידי הסימטריה בינהן סכום שמאלי עבור f הופך להיות סכום ימני עבור g.

סעיף ב.

נגדיר את הסימטריה של הדוגמא שלמעלה. אם x נקודה כלשהי אז x-1 הוא מרחקה של הנקודה מציר הסימטריה, ואז הנקודה הסימטרית לה היא 1-(x-1)=2-x. לכן הקשר הוא g(x)=f(2-x). ובאמת הפונקציות g=2-x,f=x מקיימות קשר זה. לכן עבור כל f רציפה בקטע [0,2], נגדיר את g על ידי g(x)=f(2-x) ונקבל זוג פונקציות כדרוש.