המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

**<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתו, מועד א.</u>**

יום ג, יד שבט התשע"ב 7-2-2012

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 6 שאלות.
- משקל כל אחת משאלות 1-4 הוא 20 נקודות .
- שאלה 5 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 6 היא שאלות הבנה ומשקלה 10 נקודות.

**בהצלחה.**

שאלה ראשונה (20 נקודות).

א. מצא את n כך ש $P_n(x)$ , פולינום מקלורן מסדר n של הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{1+7x}$ יקיים ש $|f(x)-P_n(x)|<0.1$ עבור כל x בקטע [0,1/7].

ב. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(x)$.

ג. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(0.104)$.

ד. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, מצא את $c$. כך שיתקיים השויון $f(0.104)-P_n(0.104)=R_n(c)$ .

שאלה שניה (20 נקודות).

א. עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ מצא את ישר האינטרפולציה $P_1(x)$ , בנקודות $a_0=1, a_1=64$

ב. מצא את $c$. כך שיתקיים השויון $f(27)-P_1(27)=R_1(c)$ .

ג. מהו n כך שעבור $a_0=8,....,a_n=9.261$ פולינום האינטרפולציה $P_n(x)$ של $f(x)=\sqrt[3]{x}$ יקיים לכל x בקטע [8,9.261] ש- $|f(x)-P_n(x)|<0.01$.

ד. עבור $f(x)=\sqrt{x}$ חשב את ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=1 את ישר טיילור $T_1(x)$ סביב a=64 , ואת פולינום האינטרפולציה $Q_1(x)$ דרך a=1,b=64.

ה. מצא קטע שבו ישר האינטרפולציה $Q_1(x)$ ,מסעיף ד מקרב טוב יותר את f של סעיף ד מאשר ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=1 וטוב יותר מאשר ישר טיילור $T_1(x)$ סביב a=64.

שאלה שלישית (20 נקודות).

א. חסום על ידי קבועים את הנגזרות מסדר 1 ו-2 של הפונקציה

$f(x)=\frac{\cos x}{x}$, בקטע $[\pi,2\pi]$ .

ב. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה

שבחשוב $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos x}{x}dx$, על ידי שיטת סכומי רימן עם n קטעים

שוים ונקודת בינים בשמאל.

ג. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה

שבחשוב $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos x}{x}dx$, על ידי שיטת הטרפז עם n קטעים שוים.

ד. מצא M שהחל ממנו החסם שבסעיף ג יהיה פחות מאלפית כפול

החסם שבסעיף ב.

שאלה רביעית ( 20 נקודות)

א. העבר את המשואה $f(x)=x^3-2x^2-5x+6=0$ לצורת נקודת

השבת על ידי העברת $x^3$ לצד שני והוצאת שורש שלישי .

ב. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה

ואיזו מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ג. העבר את המשואה $f(x)=x^3-2x^2-5x+6=0$ לצורת נקודת

השבת על ידי העברת $2x^2$ לצד שני והוצאת שורש רבועי .

ד. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה

ואיזו מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ה. מצא עבור המשואה $f(x)=x^3-2x^2-5x+7$ קטע בו מתקיים

המשפט עבור התכנסות שיטת ניוטון רפסון.

ו. באותו קטע חשב שורש של הפולינום ברמת דיוק של 0.01

שאלה חמישית (10 נקודות)

הוכח את נוסחת השגיאה עבור שיטת הטרפז, עבור $n=1$ ועבור $n$ כללי

שאלה שישית (10 נקודות)

הוכח שלכל שישה מספרים ממשיים $a,b,c,d,e,f$ המקיימים $a\neq b$, קים פולינום $p$ יחיד ממעלה קטנה או שוה ל-3 אשר מקיים $p(a)=c,p(b)=d$ $.p'(a)=e,p''(a)=f$

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית :

נוסחאות סכומים :

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2},\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^3=n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור :

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!}+R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור :

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה :

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

## מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

## שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i}(x - a_j)}{\prod_{j \ne i}(a_i - a_j)}$$

## הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

## נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\dots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

## נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$ :

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז :

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי) :

$$\frac{h}{3}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון :

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה :

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$.  בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ .  אם בטוי זה שוה ל-0

סימנו, ואם לא אז $[a_n,c_n]=[a_{n+1},b_{n+1}]$ , או, $[c_n,b_n]=[a_{n+1},b_{n+1}]$. הדבר נקבע כך ש $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$- .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיך):
$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:
$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:
$|E_n|\le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p)=\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1}-L|\le\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2$$

כאשר $m=\inf f'$, $M=\sup f''$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.

## תשובות

## תשובה ראשונה

$$f(x)=\sqrt[3]{1+7x},\ f'(x)=\frac{7}{3(\sqrt[3]{1+7x})^2},\ f''(x)=\frac{(-2)7^2}{3^2(\sqrt[3]{1+7x})^5},\ f'''(x)=\frac{(-2)(-5)7^3}{3^3(\sqrt[3]{1+7x})^8},\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-2)(-5)\cdots(4-3n)7^n}{3^n(\sqrt[3]{1+7x})^{3n-1}},\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(-2)(-5)\cdots(4-3n)(1-3n)7^{n+1}}{3^{n+1}(\sqrt[3]{1+7x})^{3n+2}}$$

א.

ולכן:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-2)(-5)\cdots(4-3n)(1-3n)7^{n+1}x^{n+1}}{3^{n+1}(\sqrt[3]{1+7c})^{3n+2}(n+1)!},|R_n(x)|=\frac{2}{3}\frac{5}{3\cdot 2}\cdots\frac{3n-1}{3\cdot n}\frac{1}{3\cdot(n+1)}\frac{(7x)^{n+1}}{(\sqrt[3]{1+7c})^{3n+2}},$$
$$|R_n(x)|\le\frac{2}{3}\cdot 1\cdots 1\frac{1}{3\cdot(n+1)}\frac{(7x)^{n+1}}{(\sqrt[3]{1+7\cdot 0})^{3n+2}}=\frac{2\cdot(1)^{n+1}}{9(n+1)(\sqrt[3]{1})^{3n+2}}\le\frac{2}{9(n+1)}<0.1\to\frac{20}{9}<n+1\to 1<n\to 2\le n$$

ב.

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{7}{3},\ f''(0)=\frac{-98}{9},P_2(x)=1+\frac{7x}{3}-\frac{49x^2}{9}$$

ג.

$$P_2(x)=1+\frac{7x}{3}-\frac{49x^2}{9},P_2(\frac{13}{125})=1+\frac{7}{3}\frac{13}{125}-\frac{49}{9}\frac{169}{15625}=1+\frac{34125-8281}{140625}=1+\frac{25844}{140625}\sim 1.1837795555$$

$$f(x)=\sqrt[3]{1+7x},\ f(0.104)=\sqrt[3]{1+7\cdot 0.104}=\sqrt[3]{1.728}=1.2$$

ד

$$f(x)=\sqrt[3]{1+7x},\ f(\frac{13}{125})-P_2(\frac{13}{125})=1.2-(1+\frac{103376}{562500})=1+\frac{28125}{140625}-(1+\frac{25844}{140625})=\frac{2281}{140625}=e$$

$$e=\frac{2281}{140625}\rightarrow\frac{(-2)(-5)7^3}{3^3(\sqrt[3]{1+7c})^8}(\frac{13}{125})^3\frac{1}{6}=\frac{2281}{140625}\rightarrow\frac{1}{(\sqrt[3]{1+7c})^8}=\frac{2281\cdot 6}{140625\cdot 10}(\frac{125\cdot 3}{13\cdot 7})^3\rightarrow$$

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{1+7c})^8}=\frac{2281\cdot 6}{(125\cdot 3)^2\cdot 10}(\frac{125\cdot 3}{13\cdot 7})^3=\frac{2281\cdot 6\cdot 125\cdot 3}{10}(\frac{1}{13\cdot 7})^3=\frac{2281\cdot 25\cdot 3^2}{(13\cdot 7)^3}\rightarrow$$

$$(\sqrt[3]{1+7c})^8=\frac{(13\cdot 7)^3}{2281\cdot 25\cdot 3^2}\rightarrow 1+7c=(\frac{(13\cdot 7)^3}{2281\cdot 25\cdot 3^2})^{3/8}\sim 1.15493126\rightarrow c\sim 0.0221330385$$

## תשובה 2

א. $$f(x)=\sqrt[3]{x},\ f(1)=1,\ f(64)=4,P_1=\frac{(x-1)(4-1)}{(64-1)}+1=\frac{(x-1)}{21}+1=\frac{x+20}{21}$$

ב.

$$f(27)-P_1(27)=\sqrt[3]{27}-\frac{27+20}{21}=3-\frac{47}{21}=\frac{16}{21}=R_1(c)=\frac{f''(c)(27-1)(27-64)}{2}\rightarrow$$

$$f''(c)=\frac{32}{21\cdot 26\cdot(-37)}\rightarrow\frac{1}{3}\frac{(-2)}{3}c^{-5/3}=\frac{-16}{21\cdot 13\cdot 37}\rightarrow c^{-5/3}=\frac{24}{7\cdot 13\cdot 37}\rightarrow c^{5/3}=\frac{3367}{24}\rightarrow$$

$$c=(\frac{3367}{24})^{0.6}\sim 19.41865405....$$

ג.

$$f(x)-P_n(x)=R_n(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-8)(x-a_1)..(x-a_{n-1})(x-9.261)}{(n+1)!}\to$$

$$|R_n(c)|\le\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\cdot(3n-1)(9.261-8)^{n+1}}{c^{(3n+2)/3}3^{n+1}(n+1)!}\le\frac{2}{3}\frac{5}{6}...\frac{3n-1}{3n}\frac{(1.261)^{n+1}}{3(n+1)c^{(3n+2)/3}}\le\frac{(1.261)^{n+1}}{3(n+1)8^{(3n+2)/3}}$$

$$|R_n(c)|\le\frac{2(1.261)^{n+1}}{3(n+1)8^{(3n+3)/3}}=\frac{2(1.261)^{n+1}}{3(n+1)8^{n+1}}=\frac{2(0.157625)^{n+1}}{3(n+1)}\le\frac{2(0.16)^{n+1}}{3(n+1)}$$

נציב כמה n-ים בסדרה יורדת זו ונשים לב כי עבור n+1=3 הערכים קטנים כדרוש, כלומר צריך פולינום אינטרפולציה ע״ס 3 נקודות, $a_0=8,a_5=9.261$ ובנוסף עוד נקודת בינים אחת.

ד.

$$f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},S_1=1+\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{2},T_1=8+\frac{x-64}{16}=\frac{x+64}{16},$$

$$Q_1(x)=1+\frac{(x-1)(8-1)}{64-1}=1+\frac{(x-1)}{9}=\frac{x+8}{9}$$

ה. כיון שf קעורה, הרי שישרי טיילור הם מעל הגרף, ופולינום האינטרפולציה מתחתיו, ולכן :

$$e_1=\frac{x+1}{2}-\sqrt{x},e_2=\frac{x+64}{16}-\sqrt{x},e_3=\sqrt{x}-\frac{x+8}{9}\to$$

$$[\sqrt{x}-\frac{x+8}{9}<\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}]\wedge[\sqrt{x}-\frac{x+8}{9}<\frac{x+64}{16}-\sqrt{x}]\to$$

$$[2\sqrt{x}<\frac{x+8}{9}+\frac{x+1}{2}]\wedge[2\sqrt{x}<\frac{x+64}{16}+\frac{x+8}{9}]\to$$

$$[36\sqrt{x}<2(x+8)+9(x+1)]\wedge[288\sqrt{x}<9(x+64)+16(x+8)]\to$$

$$[36\sqrt{x}<11x+25]\wedge[288\sqrt{x}<25x+704]\to$$

$$[1296x<121x^2+550x+625]\wedge[82944x<625x^2+35200x+495616]\to$$

$$[0<121x^2-746x+625]\wedge[0<625x^2-47744x+495616].$$

שרשי המשואה הראשונה הם 1 וגם 1250/242=625/121, ושרשי המשואה השניה הם 64 וגם 7744/625. לכן הקטע הרצוי הוא [625/121,7744/625]≈[5.165,12.3904]

תשובה 3

א.

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\ f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2},$$

$$f''(x)=-\frac{(-x\cos x+\sin x-\sin x)x^2-2x(x\sin x+\cos x)}{x^4}=\frac{x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x}{x^3},$$

$$f'''(x)=\frac{x^3(-x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+2x\cos x+2\sin x)-3x^2(x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x)}{x^6}=$$

$$=\frac{-x^5\sin x+(2+2-3)x^4\cos x+(2-2-6)x^3\sin x-6x^2\cos x)}{x^6}=$$

$$=\frac{-x^3\sin x+x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x}{x^4}.$$

$$f^{(4)}=\frac{x^4[(-3x^2\sin x+2x\cos x-6\sin x)+(-x^3\cos x-x^2\sin x-6x\cos x+6\sin x)]}{x^8}$$

$$-\frac{4x^3(-x^3\sin x+x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x)}{x^8}=\frac{x[-x^3\cos x-4x^2\sin x-4x\cos x]}{x^5}$$

$$\frac{4x^3\sin x-4x^2\cos x+24x\sin x+24\cos x}{x^5}=\frac{-x^4\cos x-8x^2\cos x+24x\sin x+24\cos x}{x^5}$$

ולכן, בקטע [π,2π] .

$$|f(x)|\le\frac{1}{\pi},|f'(x)|\le\frac{2\pi+1}{\pi^2},|f''(x)|\le\frac{4\pi^2+4\pi+2}{\pi^3},|f'''(x)|\le\frac{8\pi^3+4\pi^2+12\pi+6}{\pi^4}.$$

$$|f^{(4)}|\le\frac{16\pi^4+32\pi^2\cos x+48\pi+24}{\pi^5}$$

ב. $$|R|=|\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}|\le\frac{(2\pi+1)\pi^2}{\pi^2 2n}=\frac{2\pi+1}{2n}$$

ג.

$$|R|=|\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}|\le\frac{4\pi^2+4\pi+2}{\pi^3}\frac{\pi^3}{12n^2}=\frac{4\pi^2+4\pi+2}{12n^2}=$$

$$=\frac{2\pi^2+2\pi+1}{6n^2}$$

ד.

$$|R|=\left|\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}\right|\le\frac{16\pi^4+32\pi^2\cos x+48\pi+24}{\pi^5}\frac{\pi^5}{180n^4}=$$

$$=\frac{16\pi^4+32\pi^2\cos x+48\pi+24}{180n^4}=\frac{4\pi^4+8\pi^2\cos x+12\pi+6}{45n^4}$$

ה.

$$\frac{2\pi^2+2\pi+1}{6n^2}\le\frac{2\pi+1}{1000n2}\to 2000\frac{2\pi^2+2\pi+1}{6\pi(2\pi+1)}\le n\to$$

$$\frac{2000\pi^2+2000\pi+1000}{3\pi(2\pi+1)}\le n$$

ו.

$$\frac{4\pi^4+8\pi^2\cos x+12\pi+6}{45n^4}\le\frac{2\pi^2+2\pi+1}{1000\cdot 6n^2}\to 6000\frac{4\pi^4+8\pi^2\cos x+12\pi+6}{45(2\pi^2+2\pi+1)}\le n^2$$

$$\to 400\frac{4\pi^4+8\pi^2\cos x+12\pi+6}{6\pi^2+6\pi+3}\le n^2$$

תשובה 4

א,ב.

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+6=0\to x^3=2x^2+5x-6\to x=\sqrt[3]{2x^2+5x-6}=g(x),$$

$$g'(x)=\frac{4x+5}{3g^2},g'(1)=\frac{9}{3}=3,g'(3)=\frac{17}{27},g'(-2)=\frac{-3}{12}.$$

לכן 1 דוחה, 3 מושכת ומינוס 2 מושכת עוד יותר חזק.

ג,ד.

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+6=0\to 2x^2=x^3-5x+6\to x=\sqrt{\frac{x^3-5x+6}{2}}=g(x),$$

$$g'(x)=\frac{3x^2-5}{4g},g'(1)=\frac{-2}{4}=-0.5,g'(3)=\frac{22}{12},g'(-2)=\frac{7}{-8}.$$

לכן 3 דוחה, מינוס 2 מושכת ו 1 מושכת עוד יותר חזק.

ה.

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+7,\ f'=3x^2-4x-5,\ f''=6x-4,\ f'=0\to x=\frac{4\pm\sqrt{16+60}}{6}\sim 2.1196,-0.786,$$

$$f''>0\to x>0.666,\ f(2.5)=\frac{-19}{8},f(3)=1,[a,b]=[2.5,3],M=f''(3)=14,m=f'(2.5)=15/4$$

מצאנו את הקטע, כעת נחשב את השגיאה:

$$|x_{n+1}-L|\le\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2=\frac{14}{30/4}(x_{n+1}-x_n)^2\le 0.01\to(x_{n+1}-x_n)^2\le\frac{3}{560}\sim 0.0535$$

$$\to|x_{n+1}-x_n|\le 0.0731925....$$

וכעת את הסדרה

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+7,\to g=x-\frac{f}{f'}=x-\frac{x^3-2x^2-5x+7}{3x^2-4x-5}=\frac{2x^3-2x^2-7}{3x^2-4x-5},x_0=3,$$

$$x_1=g(3)=\frac{54-18-7}{27-12-5}=\frac{29}{10}=2.9,x_2=g(2.9)=\frac{2\cdot 24.389-2\cdot 8.41-7}{3\cdot 8.41-4\cdot 2.9-5}=\frac{24.958}{8.63}=2.892,$$

$$|x_2-x_1|=0.008<0.073$$

## תשובה 6

פולינום ממעלה קטנה או שוה 3 מתאפיין על ידי 4 מקדמים שנסמנם

.q,r,s,t אז $p(x)=q+rx+sx^2+tx^3$ וחיבות להתקיים 4 המשוואות הבאות

$$\begin{cases} q+ra+sa^2+ta^3=c \\ q+rb+sb^2+tb^3=d \\ r+2sa+3ta^2=e \\ 2s+6ta=f \end{cases}$$

זו מערכת לינארית שנעלמיה הם q,r,s,t ולכן עלינו להוכיח כי הדטרמיננט של מטריצת המקדמים שונה מ-0. אותו נחשב על ידי פעולות (שומרות דטרמיננט) על המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6a \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2/(b-a)\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6a \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & a-b & 2a^2-ab-b^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6a \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det = (b-a)(6a(a-b) - 2(2a^2 - ab - b^2)) = (b-a)(6a^2 - 6ab - 4a^2 + 2ab + 2b^2) =$$
$$= (b-a)(2a^2 - 4ab + 2b^2) = 2(b-a)^3 \neq 0$$

כלומר תמיד יש 4 מקדמים יחידים כך שתתקיימנה המשוואות הללו.