המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתיו, מועד א.</u>

יום א, ט אדר א התשע"ד 9-2-2014

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שלוש וחצי שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 6 שאלות.
- משקל כל אחת משאלות 1-4 הוא 20 נקודות . בכל השאלות, למעט שאלה 3, המשקל מתפלג באופן אחיד בין הסעיפים.
- שאלות 5,6 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה ראשונה (20 נקודות).

א. מצא את n כך ש $P_n(x)$, פולינום מקלורן מסדר n של הפונקציה $f(x)=\sqrt{2401+200x}$ יקיים ש $|f(x)-P_n(x)|<0.2$ עבור כל x בקטע [0,6].

ב. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(x)$.

ג. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(0.495)$.

ד. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, מצא את c. כך שיתקים השויון $f(0.495)-P_n(0.495)=R_n(c)$.

שאלה שניה (20 נקודות).

א. עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ מצא את ישר האינטרפולציה $P_1(x)$, בנקודות $a_0=1, a_1=125$

ב. מצא את c. כך שיתקים השויון $f(27)-P_1(27)=R_1(c)$.

ג. מהו n כך שעבור $a_0=64,....,a_n=128$ פולינום האינטרפולציה $P_n(x)$ של $f(x)=\sqrt[3]{x}$ יקיים לכל x בקטע [64,128] ש- $|f(x)-P_n(x)|<0.01$.

ד. עבור $f(x)=\sqrt{x}$ חשב את ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=4 את ישר טיילור $T_1(x)$ סביב a=16 , ואת ישר האינטרפולציה $Q_1(x)$ דרך a=4,b=16.

ה. מצא קטע שבו ישר האינטרפולציה $Q_1(x)$ מקרב טוב יותר את f מאשר ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=4 וטוב יותר מאשר ישר טיילור $T_1(x)$ סביב a=16. שלשת הישרים חושבו בסעיף ד.

שאלה שלישית (20 נקודות).

שאלה זו היא היחידה שבה המשקל איננו מתפלג בצורה אחידה, ובו יש יותר משקל להתחלה ופחות לסוף.

א. חסום על ידי קבועים את הנגזרות מסדר 1, ו-2 של הפונקציה $f(x)=e^{\cos(x)}$, בקטע $[0,\pi]$. (4 נקודות)

ב. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה שבחשוב $\int_0^\pi e^{\cos(x)}dx$, על ידי שיטת סכומי רימן עם n קטעים שוים ונקודת בינים בשמאל. (4 נקודות)

ג. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה שבחשוב $\int_0^\pi e^{\cos(x)}dx$, על ידי שיטת הטרפז עם n קטעים שוים. (4 נקודות)

ד. מצא M שהחל ממנו החסם שבסעיף ג יהיה פחות מאלפית כפול החסם שבסעיף ב. (4 נקודות)

ה. חסום על ידי קבועים את הנגזרות מסדר 3, ו-4 של הפונקציה $f(x)=e^{\cos(x)}$, בקטע $[0,\pi]$. (2 נקודות).

ו. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה שבחשוב $\int_0^\pi e^{\cos(x)}dx$, על ידי שיטת סימפסון עם 2n קטעים שוים. (נקודה אחת)

ז. מצא M שהחל ממנו החסם שבסעיף ו יהיה פחות מאלפית כפול החסם שבסעיף ג. (נקודה אחת)

שאלה רביעית (20 נקודות)

א. העבר את המשוואה $f(x)=x^3+3x^2-34x-120=0$ לצורת נקודת השבת על ידי העברת x^3 לצד שני והוצאת שורש שלישי . קרא לאגף אחד g(x).

ב. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה איזו מושכת והאם יש נקודה שאי אפשר להחליט לגביה אם היא דוחה או מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ג. העבר את המשוואה $f(x)=x^3+3x^2-34x-120=0$ לצורת נקודת השבת על ידי העברת $3x^2$ לצד שני והוצאת שורש רבועי . קרא לאגף אחד g(x).

ד. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה איזו מושכת והאם יש נקודה שאי אפשר להחליט לגביה אם היא דוחה או מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ה. מצא עבור המשוואה $f(x)=x^3+3x^2-34x-121=0$ קטע בו מתקיים המשפט עבור התכנסות שיטת ניוטון רפסון.

ו. באותו קטע חשב שורש של הפולינום ברמת דיוק של 0.01

שאלה חמישית (10 נקודות)

הוכח את המשפט:

נניח כי f בעלת נגזרת שניה רציפה בקטע [a,b], כי f(a)<0<f(b) וכי f',f" חיוביות בקטע [a,b]. אז.

א. למשוואה f(x)=0 יש פתרון יחיד בקטע [a,b] שיסומן c.

ב. נגדיר $x_0=b$ ונגדיר $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$. אז הסדרה הזו מתכנסת ל c.

ג. נסמן $M=\sup_{a\le x\le b} f''(x), m=\inf_{a\le x\le b} f'(x)$ אז לכל n מתקיים

$$x_{n+1}-c\le \frac{M(x_{n+1}-x_n)^2}{2m}$$

שאלה שישית (10 נקודות)

נסח והוכח את משפט שארית לגרנג' עבור פולינום האינטרפולציה.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן :

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז :

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי) :

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון :

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה :

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק) :

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר :

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת :
$|E_n| \le M^n(b-a)$, $M=\sup g'(x)$, $a \le x \le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $M=\sup f''$, $m=\inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.

תשובה ראשונה

א.

$$f(x)=\sqrt{2401+200x},\ f'(x)=\frac{200}{2\sqrt{2401+200x}},\ f''(x)=\frac{-40000}{4(\sqrt{2401+200x})^3},$$

$$f'''(x)=\frac{(-1)(-3)200^3}{2^3(\sqrt{2401+200x})^5},\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)200^n}{2^n(\sqrt{2401+200x})^{2n-1}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)200^{n+1}}{2^{n+1}(\sqrt{2401+200x})^{2n+1}}$$

ולכן:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)(-3)\cdots(3-2n)(1-2n)200^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}(\sqrt{2401+200c})^{2n+1}(n+1)!},$$

$$|R_n(x)|=\frac{1}{2}\frac{3}{2\cdot 2}\cdots\frac{2n-1}{2\cdot n}\frac{1}{4\cdot(n+1)}\frac{(200x)^{n+1}}{(\sqrt{2401+200c})^{2n+1}},$$

$$|R_n(x)|\le\frac{1}{2}\cdot 1\cdots 1\frac{1}{2\cdot(n+1)}\frac{(200x)^{n+1}}{(\sqrt{2401+200\cdot 0})^{2n+1}}\le\frac{(200x)^{n+1}}{4(n+1)(\sqrt{2401})^{2n+1}}=$$

$$=\frac{49(200x)^{n+1}}{4(n+1)(2401)^{n+1}}=\frac{49}{4(n+1)}(\frac{200x}{2401})^{n+1}\le\frac{49}{4(n+1)}(\frac{1200}{2401})^{n+1}<\frac{49}{4(n+1)}(\frac{1}{2})^{n+1}.\frac{49}{16}(\frac{1}{2})^4=\frac{49}{256}=0.1914$$

ב.

כלומר n=3 מספיק עבור השגיאה.

$$f(x)=\sqrt{2401+200x},\ f'(x)=\frac{200}{2\sqrt{2401+200x}},\ f''(x)=\frac{-40000}{4(\sqrt{2401+200x})^3},$$

$$f'''(x)=\frac{(-1)(-3)200^3}{2^3(\sqrt{2401+200x})^5},\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)200^n}{2^n(\sqrt{2401+200x})^{2n-1}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)200^{n+1}}{2^{n+1}(\sqrt{2401+200x})^{2n+1}},\ f(0)=49,\ f'(0)=\frac{100}{49},\ f''(0)=\frac{-10000}{49^3}=\frac{-10000}{7^6},$$

$$f'''(0)=\frac{(-1)(-3)200^3}{2^3(49)^5}=\frac{100^3 3}{49^5},P_3(x)=49+\frac{100x}{49}-\frac{5000x^2}{7^6}+\frac{500000x^3}{7^{10}}$$

ג.

$$P_3(x) = 49 + \frac{100x}{49} - \frac{5000x^2}{7^6} + \frac{500000x^3}{7^{10}}, P_3(0.495) = 49 + \frac{495}{490} - \frac{495^2}{200*7^6} + \frac{495^3}{2000*7^{10}} =$$

$$= 50 + \frac{1}{98} - \frac{495^2}{200*7^6} + \frac{495^3}{2000*7^{10}} = 50 + \frac{1}{98} - \frac{99^2}{2^3*7^6} + \frac{99^3}{2^4*7^{10}} = 50 + \frac{8*7^8 - 2*2401*99^2 + 99^3}{2^4*7^{10}} =$$

$$= 50 + \frac{46118408 - 47064402 + 970299}{2^4*7^{10}} = 50 + \frac{970299 - 945994}{2^4*7^{10}} = 50 + \frac{970299 - 945994}{2^4*7^{10}} = 50 + \frac{24305}{2^4*7^{10}}$$

$$f(x) = \sqrt{2401 + 200x},\ f(0.495) = \sqrt{2401 + 99} = \sqrt{2500} = 50$$

ד

$$f(0.495) - P_3(0.495) = 50 - (50 + \frac{24305}{2^4*7^{10}}) = -\frac{24305}{2^4*7^{10}} = e$$

$$\to \frac{(-1)(-3)(-5)200^4}{2^4(\sqrt{2401+200c})^7}(\frac{495}{1000})^4\frac{1}{24} = -\frac{24305}{2^4*7^{10}} \to \frac{(-1)(-3)(-5)99^4}{2^4(\sqrt{2401+200c})^7}\frac{1}{24} = -\frac{24305}{2^4*7^{10}}$$

$$\to \frac{5*99^4}{2^7(\sqrt{2401+200c})^7} = \frac{24305}{2^4*7^{10}} \to \frac{1}{\sqrt{2401+200c}^7} = \frac{2^3*4861}{7^{10}*99^4}$$

$$\to \sqrt{2401+200c}^7 = \frac{7^{10}*99^4}{2^3*4861} \to (2401+200c)^7 = \frac{7^{20}*99^8}{2^6*4861^2}$$

$$\to 2401 + 200c = \sqrt[7]{\frac{7^{20}*99^8}{2^6*4861^2}} \sim 2420.541279 \to 200c \sim 19.541279 \to c \sim 0.0977$$

תשובה שניה

א. $f(x) = \sqrt[3]{x},\ f(1) = 1,\ f(125) = 5, P_1 = \frac{(x-1)(5-1)}{(125-1)} + 1 = \frac{(x-1)}{31} + 1 = \frac{x+30}{31}$

ב.

$$f(27)-P_1(27)=\sqrt[3]{27}-\frac{27+30}{31}=3-\frac{57}{31}=\frac{36}{31}=R_1(c)=\frac{f''(c)(27-1)(27-125)}{2}\to$$

$$f''(c)=\frac{72}{31\cdot 26\cdot(-98)}\to\frac{1}{3}\frac{(-2)}{3}c^{-5/3}=\frac{-18}{31\cdot 13\cdot 49}\to c^{-5/3}=\frac{81}{31\cdot 13\cdot 49}$$

$$\to c^{5/3}=\frac{31\cdot 13\cdot 49}{81}\to c=(\frac{19747}{81})^{0.6}\sim 27.0526....$$

ג.

$$f(x)-P_n(x)=R_n(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-64)(x-a_1)..(x-a_{n-1})(x-128)}{(n+1)!}\to$$

$$|R_n(c)|\le\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdot(3n-1)(128-64)^{n+1}}{c^{(3n+2)/3}3^{n+1}(n+1)!}\le\frac{2}{3}\frac{5}{6}...\frac{3n-1}{3n}\frac{(128-64)^{n+1}}{3(n+1)c^{(3n+2)/3}}\le\frac{(128-64)^{n+1}}{3(n+1)64^{(3n+2)/3}}$$

$$|R_n(c)|\le\frac{4(64)^{n+1}}{3(n+1)64^{(3n+3)/3}}=\frac{64^{n+1}4}{3(n+1)64^{n+1}}=\frac{4}{3(n+1)}\le 0.01$$

וברור שעבור n=133 הערכים קטנים כדרוש, כלומר צריך פולינום אינטרפולציה ע״ס 134 נקודות, $a_0=64,a_{134}=128$.

ד.

$$f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},S_1=2+\frac{x-4}{4}=\frac{x+4}{4},T_1=4+\frac{x-16}{8}=\frac{x+16}{8},$$

$$Q_1(x)=2+\frac{(x-4)(4-2)}{16-4}=2+\frac{x-4}{6}=\frac{x+8}{6}$$

ה. כיון ש f קעורה, הרי שישרי טיילור הם מעל הגרף, ופולינום האינטרפולציה מתחתיו, ולכן :

$$e_1=\frac{x+4}{4}-\sqrt{x},e_2=\frac{x+16}{8}-\sqrt{x},e_3=\sqrt{x}-\frac{x+8}{6}\to$$

$$[\sqrt{x}-\frac{x+8}{6}<\frac{x+4}{4}-\sqrt{x}]\wedge[\sqrt{x}-\frac{x+8}{6}<\frac{x+16}{8}-\sqrt{x}]\to$$

$$[2\sqrt{x}<\frac{x+8}{6}+\frac{x+4}{4}]\wedge[2\sqrt{x}<\frac{x+8}{6}+\frac{x+16}{8}]\to$$

$$[24\sqrt{x}<2(x+8)+3(x+4)]\wedge[48\sqrt{x}<4(x+8)+3(x+16)]\to$$

$$[24\sqrt{x}<5x+28]\wedge[48\sqrt{x}<7x+80]\to$$

$$[576x<25x^2+280x+784]\wedge[2304x<49x^2+1120x+6400]\to$$

$$[0<25x^2-296x+784]\wedge[0<49x^2-1184x+6400].$$

נחשב את שרשי המשואות

$$25x^2-296x+784=0 \to \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{296\pm\sqrt{87616-78400}}{50}=\frac{296\pm\sqrt{9216}}{50}=$$

$$\frac{296\pm 96}{50}=4,\frac{296\pm 96}{50},x_{1,2}=4,\frac{392}{50},x_{1,2}=4,7.84$$

$$49x^2-1184x+6400=0 \to \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1184\pm\sqrt{1401856-1254400}}{98}=\frac{1184\pm\sqrt{147456}}{98}=$$

$$\frac{1184\pm 384}{98}=\frac{800}{98},\frac{1568}{98},x_{1,2}=\frac{400}{49},\frac{784}{49},x_{1,2}=\frac{400}{49},\frac{112}{7},x_{1,2}=\frac{400}{49},16$$

ולכן הקטע הרצוי הוא [7.84,8.16326]≈[7.84,400/49]

תשובה 3

א.

$$f(x)=e^{\cos(x)},\ f'(x)=e^{\cos(x)}(-\sin(x)),\ f''(x)=e^{\cos(x)}(\sin^2(x)-\cos(x)),$$
$$f'''(x)=e^{\cos(x)}(-\sin^3(x)+\sin(x)\cos(x)+2\sin(x)\cos(x)+\sin(x))=$$
$$=e^{\cos(x)}(\sin(x)-\sin^3(x)+3\sin(x)\cos(x)).,\ f''''(x)=e^{\cos(x)}(\cos(x)-3\sin^2(x)\cos(x)+3\cos^2(x)$$
$$-3\sin^2(x))-\sin^2(x)+\sin^4(x)-3\sin^2(x)\cos(x))=$$
$$e^{\cos(x)}(\cos(x)-6\sin^2(x)\cos(x)+3\cos^2(x)-4\sin^2(x)+\sin^4(x))=$$
$$e^{\cos(x)}(\cos(x)-6\sin^2(x)\cos(x)+(3\cos^2(x)-3\sin^2(x))-\sin^2(x)+\sin^4(x))=$$
$$=e^{\cos(x)}(\cos(x)-6\sin^2(x)\cos(x)+3\cos(2x)-\sin^2(x)+\sin^4(x))=$$
$$=e^{\cos(x)}(\cos(x)-6\sin^2(x)\cos(x)+3\cos(2x)-\sin^2(x)(1-\sin^2(x)))=$$
$$=e^{\cos(x)}(\cos(x)-6\sin^2(x)\cos(x)+3\cos(2x)-\sin^2(x)\cos^2(x)).$$

ולכן , בקטע $[0,\pi]$

$$| f(x)| \le e^1, | f'(x)| \le 1e^1 = e^1, | f''(x)| \le e^1(1+1) = 2e^1, | f'''(x)| \le e^1(1+1+3) = 5e^1.,$$
$$| f^{(4)}| \le e^1(1+6+3+1) = 11e^1$$

ב. $$| R | = \left| \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n} \right| \le \frac{e\pi^2}{2n}.$$

$$| R | = \left| \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2} \right| \le \frac{2e\pi^3}{12n^2} = \frac{e\pi^3}{6n^2}.$$

ג.

ד. $$| R | = \left| \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4} \right| \le \frac{11e\pi^5}{180n^4}..$$

ה. $$\frac{e\pi^3}{6n^2} \le \frac{e\pi^2}{2n1000} \to 334\pi \le n$$

ו. $$\frac{11e\pi^5}{180n^4} \le \frac{e\pi^3}{6n^2 1000} \to \frac{1100 \cdot \pi^2}{3} \le n^2 \to \sqrt{\frac{11}{3}}\pi 10 \le n \to 60.15 \le n$$

תשובה 4

א,ב.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 34x - 120 = 0 \to x^3 = 34x + 120 - 3x^2 \to x = \sqrt[3]{34x + 120 - 3x^2} = g(x),$$
$$g'(x) = \frac{34 - 6x}{3g^2}, g'(-4) = \frac{58}{48}, g'(-5) = \frac{68}{75}, g'(6) = \frac{-2}{108}.$$

לכן 4- דוחה, 5- מושכת ו 6 מושכת יותר.

ג,ד.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 34x - 120 = 0 \to 3x^2 = 34x + 120 - x^3 \to x = \sqrt{\frac{34x + 120 - x^3}{3}} = g(x),$$

$$g'(x) = \frac{34 - 3x^2}{6g}, g'(-4) = -\frac{-14}{24}, g'(-5) = -\frac{-41}{30}, g'(6) = -\frac{-74}{36}.$$

לכן 4- מושכת, 5- דוחה ו 6 דוחה יותר.

ה,ו

$$f(x)=x^3+3x^2-34x-120,\ f'=3x^2+6x-34,\ f''=6x+6,\ f'=0\rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+408}}{6}=$$

$$\frac{-6\pm\sqrt{444}}{6}\sim\frac{-6\pm 21}{6}=2.5,-4.5,\ f''>0\rightarrow x>-1,\ f(3),\ f(4),\ f(5)<0,\ f(6)=-1,\ f(7)=131,$$

$$[a,b]=[6,7],M=f''(7)=48,m=f'(6)=110$$

מצאנו את הקטע, כעת נחשב את השגיאה:

$$|x_{n+1}-L|\le\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2=\frac{48}{220}(x_{n+1}-x_n)^2\le 0.01\rightarrow$$

וכעת

$$(x_{n+1}-x_n)^2\le\frac{220}{4800}=\frac{11}{240}\sim 0.04583\rightarrow|x_{n+1}-x_n|\le 0.2140....$$

נחשב את הסדרה

$$f(x)=x^3+3x^2-34x-120\rightarrow g=x-\frac{f}{f'}=x-\frac{x^3+3x^2-34x-120}{3x^2+12x-34}=\frac{2x^3+9x^2+120}{3x^2+12x-34},x_0=7,$$

$$x_1=g(7)=\frac{686+441+120}{147+84-34}=\frac{1247}{197}\sim 6.32,x_2=g(6.32)=\frac{987.874}{162.164}\sim 6.09,$$

$$x_3=g(6.09)=\frac{906.128}{150.432}\sim 6.023$$

$$|x_3-x_2|=0.067<0.214$$

לכן X_3 מיצג את הפתרון עד שגיאה של 0.01.