NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית.

מועד א יום ה יט תמוז התשס"ז, 5-7-2007 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 8 שאלות. על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 16 נקודות..
- שאלה 6 שאלת הוכחה.
- שאלות 7-8 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות. בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

16*5+10+2*5=80+10+10=100

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 :פקס   Tel: (972-9) 8607777 :טל

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{8+2x}$

א. מצא n טבעי עבורו פולינום טיילור בקטע [0,0.1] יהיה בדיוק של 1/10,000,000.

ב. כתב את הפולינום.

ג. חשב את $\sqrt[3]{8.1}$ בדיוק של 1/10,000,000.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{2401+1695x}, 0\le x\le 1$

א. נניח כי נתונות נקודות $0=a_0<a_1<....<a_{n-1}<a_n=1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^2 e^{x^2}dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^3-10x^2-x+10$.

א. מצא את שלשת השרשים של p (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר x^3 באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $g(x)=x$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3+28x^2+140x-399$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.001.

שאלה 6

הוכח את נוסחת השגיאה עבור שיטת הטרפז.

שאלה שביעית

נניח כי נתון n מסוים, נתונות שתי פונקציות f,g, ונתונים סכומי רימן S(n,f) , S(n,g) ו- S(n,f+g) המבוססים על אותו n ועל קטעים שוים ועל נקודות בינים משמאל, ואשר הם קרוב לאינטגרלים של f,g ושל f+g על הקטע [a,b] . נניח כי e(n,f)=□f(x)dx-S(n,f) ו-e(n,g)=□g(x)dx-S(n,g) , וכי e(n,f+g)=□[f(x)+g(x)]dx-S(n,f+g) הן שלשת השגיאות האמיתיות. אז מתקים: e(n,f+g)=e(n,f)+e(n,g).

שאלה שמינית

נניח כי נתונות שתי פונקציות f,g, כך שלכל $x\in[c,d]$ מתקים $f(x)\le g(x)$. אז לכל n טבעי ולכל נקודת השקה $a\in[c,d]$, מתקים כי פולינום טיילור של f בעל נקודת השקה a ומסדר n הוא קרוב יותר ל-f מאשר פולינום טיילור של g בעל נקודת השקה a ומסדר n קרוב ל-g . הטענה בסימונים:

$$|f(x)-p_{n,f,a}(x)|\le|g(x)-p_{n,g,a}(x)|$$

תשובות:

שאלה 1.

$$f(x)=\sqrt[3]{8+2x}=(8+2x)^{\frac{1}{3}},\ f'(x)=\frac{1}{3}2(8+2x)^{\frac{-2}{3}},$$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}2^{2}(8+2x)^{\frac{-5}{3}},\ f'''(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}2^{3}(8+2x)^{\frac{-8}{3}},$$

$$.....,\ f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}\dots\frac{4-3n}{3}2^{n}(8+2x)^{\frac{1-3n}{3}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}\dots\frac{4-3n}{3}\frac{1-3n}{3}2^{n+1}(8+2x)^{\frac{-2-3n}{3}}$$

ולכן:

$$R=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}\dots\frac{4-3n}{3}\frac{1-3n}{3}2^{n+1}(8+2c)^{\frac{-2-3n}{3}}h^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|R|=\frac{2}{3\cdot1}\frac{5}{3\cdot2}\dots\frac{3n-4}{3\cdot(n-1)}\frac{3n-1}{3\cdot n}\frac{2^{n+1}h^{n+1}}{3(n+1)(8+2c)^{\frac{2+3n}{3}}}\leq$$

$$\leq1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\frac{2^{n+1}h^{n+1}}{3(n+1)(8+2c)^{\frac{2+3n}{3}}}\leq\frac{2^{n+1}0.1^{n+1}}{3(n+1)(8+2\cdot0)^{\frac{2+3n}{3}}}=$$

$$=\frac{2^{n+1}0.1^{n+1}}{3(n+1)2^{2+3n}}=\frac{1}{3(n+1)2^{1+2n}10^{1+n}}=\frac{1}{3(n+1)\cdot2\cdot10\cdot2^{2n}10^{n}}=$$

$$=\frac{1}{60(n+1)\cdot40^{n}}$$

ולכן נציב כמה n-ים קטנים ונקבל:

$$|R| \le \frac{1}{60(n+1)\cdot 40^n}, 60(1+1)\cdot 40^1 = 4800,$$
$$60(2+1)\cdot 40^2 = 288000, 60(3+1)\cdot 40^3 = 15,360,000$$

כלומר טור טיילור מסדר 3 מספיק מדויק.

נחשב את הטור.

$$f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)h^2}{2}+\frac{f'''(0)h^3}{6}=\sqrt[3]{8+2\cdot 0}+(\frac{1}{3}2(8+2\cdot 0)^{\frac{-2}{3}})h,$$
$$+(\frac{1}{3}\frac{-2}{3}2^2(8+2\cdot 0)^{\frac{-5}{3}})\frac{h^2}{2}+(\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}2^3(8+2\cdot 0)^{\frac{-8}{3}})\frac{h^3}{6}=$$
$$2+\frac{h}{6}-\frac{h^2}{72}+\frac{5h^3}{2592}$$

ולכן:

$$\sqrt[3]{8.1}=f(0.05)=f(0+0.05)\approx f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)h^2}{2}+\frac{f'''(0)h^3}{6}=$$
$$=2+\frac{0.05}{6}-\frac{0.05^2}{72}+\frac{5\cdot 0.05^3}{2592}=2+\frac{1}{120}-\frac{144}{28800}+\frac{1}{4147200}=$$
$$=2+\frac{34560}{4147200}-\frac{144}{4147200}+\frac{1}{4147200}=2+\frac{34417}{4147200}=2.0082988522$$

בדיקה:

$$2.0082988522^3=8.100000024$$

שאלה 2.

$$f(x)=\sqrt[4]{2401+1695x}=(2401+1695x)^{\frac{1}{4}},\ f'(x)=\frac{1}{4}1695(2401+1695x)^{\frac{-3}{4}},$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}\frac{-3}{4}1695^{2}(2401+1695x)^{\frac{-7}{4}},\ f'''(x)=\frac{1}{4}\frac{-3}{4}\frac{-7}{4}1695^{3}(2401+1695x)^{\frac{-11}{4}},$$

$$.....,\ f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}\frac{-3}{4}\frac{-7}{8}...\frac{5-4n}{4}1695^{n}(2401+1695x)^{\frac{1-4n}{4}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{4}\frac{-3}{4}\frac{-7}{4}...\frac{5-4n}{4}\frac{1-4n}{4}1695^{n+1}(2401+1695x)^{\frac{-3-4n}{4}}$$

ולכן:

$$R=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\frac{-3}{4}\frac{-7}{4}...\frac{5-4n}{4}\frac{1-4n}{4}1695^{n+1}(2401+1695c)^{\frac{-3-4n}{4}}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!},$$

$$|R|=\frac{3}{4\cdot 1}\frac{7}{4\cdot 2}...\frac{4n-5}{4\cdot(n-1)}\frac{4n-1}{4\cdot n}\frac{1695^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{4(n+1)(2401+1695c)^{\frac{3+4n}{4}}}\le$$

$$\le 1\cdot 1\cdot ....\cdot 1\frac{1695^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{4(n+1)(2401+1695c)^{\frac{3+4n}{4}}}\le\frac{1695^{n+1}1^{n+1}}{4(n+1)(2401+1695\cdot 0)^{\frac{3+4n}{4}}}=$$

$$=\frac{7\cdot 1695^{n+1}}{4(n+1)7^{4+4n}}=\frac{7}{4(n+1)}\frac{1695^{n+1}}{(7^{4})^{n+1}}=\frac{7}{4(n+1)}(\frac{1695}{2401})^{n+1}\le(\frac{1695}{2401})^{n+1}$$

ולכן נקבל אי שויון על n :

$$(\frac{1695}{2401})^{n+1} \le 0.001 \to (n+1)\log_{10}(\frac{1695}{2401}) \le \log_{10}(0.001)$$
$$\to (n+1)[\log_{10}(1695) - \log_{10}(2401)] \le (-3) \to 3 \le [\log_{10}(2401) - \log_{10}(1695)](n+1)$$
$$\to \frac{3}{\log_{10}(2401) - \log_{10}(1695)} \le n+1 \to 19.838 \le (n+1)$$

כלומר יש לחשב את הפולינום עד דרגה 18.

שאלה 3

$$f = e^{x^2}, f' = 2xe^{x^2}, f'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2+4x^2)e^{x^2},$$
$$f''' = (8x)e^{x^2} + (4x+8x^3)e^{x^2} = (12x+8x^3)e^{x^2},$$
$$f'''' = (12+24x^2)e^{x^2} + (24x^2+16x^4)e^{x^2} = (12+48x^2+16x^4)e^{x^2}$$
$$f''''' = (96x+64x^3)e^{x^2} + (24x+96x^3+3x^5)e^{x^2}, 0 \le f'''''$$

ולכן f'''' עולה ולכן:

$$f''''(c) \le \max_{0\le x\le 2} f''''(c) = f''''(2) = (12+48\cdot 2^2+16\cdot 2^4)e^{2^2} = 456e^4$$

ולכן:

$$R = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4} \le \frac{456e^4 2^5}{180n^4} = \frac{152e^4 2^3}{15n^4} = \frac{1216e^4}{15n^4} \le 0.001$$
$$\to \frac{1216e^4 1000}{15} \le n^4 \to \frac{1216e^4 200}{3} \le n^4 \to \frac{243200e^4}{3} = 81066.666e^4 \le n^4$$
$$\to 16.8737099e = 45.867 \le n$$

ולכן כיון ש-n חיב להיות זוגי, n□46,m□23.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^3-10x^2-x+10$.

$$p(x)=x^3-10x^2-x+10,\ p(1)=0,\ \frac{x^3-10x^2-x+10}{x-1}=x^2-9x-10=(x+1)(x-10),$$
$$\to x^3=10x^2+x-10 \to x=\sqrt[3]{10x^2+x-10}$$

בדיקה:

$$g(x)=\sqrt[3]{10x^2+x-10},\ g(1)=1,\ g(-1)=-1,\ g(10)=10$$

וכעת נחליט אודות האופי של כל נקודת שבת:

$$g(x)=\sqrt[3]{10x^2+x-10},\ g'(x)=\frac{20x+1}{3(\sqrt[3]{10x^2+x-10})^2}=\frac{20x+1}{3(g(x))^2},\ g'(1)=\frac{21}{3\cdot 1^2}=7,$$
$$g'(-1)=\frac{-19}{3\cdot 1^2},\ g'(10)=\frac{201}{3\cdot 10^2}=\frac{201}{300}$$

ולכן הנקודה היחידה המושכת היא 10.

שאלה חמישית

נביט בפולינום ונציב נקודות.

$$f(x)=x^3+28x^2+140x-399,\ f(1)=1+28+140-399<0,$$
$$f(2)=8+112+280-399=1>0,\ f'=3x^2+56x+140>0,\ f''=6x+56$$

ברור כי f',f''>0 כיון שאלו פונקציות המוגדרות על קטע חיובי.

לכן נפעיל את השיטה ואז כיון ש-f',f'' הן פונקציות עולות:

$$m=inf(f')=f'(1)=3\cdot 1^2+56\cdot 1+140=199$$
$$M=\sup(f'')=f''(2)=6\cdot 2+56=68,$$
$$|x_{n+1}-\lim|\le\frac{M}{2m}|x_{n+1}-x_n|^2=\frac{68}{2\cdot 199}|x_{n+1}-x_n|^2=\frac{34}{199}|x_{n+1}-x_n|^2$$

ולכן:

$$\frac{34}{199}|x_{n+1}-x_n|^2<0.001\to|x_{n+1}-x_n|^2<\frac{34}{199000}=\frac{17}{99500}\to|x_{n+1}-x_n|<0.0130$$

כלומר ברגע שהמרחק בין קרובים עוקבים קטן מ-0.013 הרי שהקרוב האחרון קרוב לשרש עד כדי 0.001. וכעת:

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^3+28x^2+140x-399}{3x^2+56x+140}=\frac{(3x^3+56x^2+140x)-(x^3+28x^2+140x-399)}{3x^2+56x+140}=$$
$$=\frac{2x^3+28x^2+399}{3x^2+56x+140},x_1=g(2)=\frac{16+112+399}{12+112+140}=\frac{527}{264}=1.99621,$$
$$x_0-x_1=2-1.99621=0.00379<0.013$$

כלומר כבר x_1 מקים את הדרוש.

תשובה 7

$$e(n,f+g)=\int_a^b (f(x)+g(x))dx-\sum_{i=0}^{n-1}(f+g)(a+ih)=$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx-\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)-\sum_{i=0}^{n-1} g(a+ih)=$$
$$=\int_a^b f(x)dx-\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)+\int_a^b g(x)dx-\sum_{i=0}^{n-1} g(a+ih)=$$
$$=e(n,f)+e(n,g).$$

תשובה 8

לא, נביט על $f(x)=\sin(x),g(x)=x,[c,d]=[0,\infty]$. ידוע כי על קטע זה $\sin(x)\le x$. נבחר את פולינומי מקלורן (נקודת השקה $a=0$) ונבחר $n=1$. ונקבל:

$$p_{1,f,a=0}(x)=f(0)+f'(0)x=\sin(0)+\cos(0)x=0+1\cdot x=x,$$
$$p_{1,g,a=0}(x)=g(0)+g'(0)x=x(0)+1(0)x=0+1\cdot x=x,$$

כלומר יש להם אותו פולינום טיילור במקרה זה. אבל

$$f(x)-p_{1,f,a=0}(x)=\sin(x)-x\neq 0$$
$$g(x)-p_{1,g,a=0}(x)=x-x\equiv 0$$

כלומר הפולינום של g קרוב יותר אליה מאשר זה של g.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_nf(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n| \le M^n(b-a)$, $M=\sup g'(x)$, $a \le x \le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $M=\sup f''$, $m=\inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.