NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

**המכללה האקדמית נתניה ע"ר**
**רח' האוניברסיטה 1**
**קרית יצחק רבין**
**נתניה** 42365

**<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית.</u>**

יום א, כז שבט התשס"ח 3-2-2008

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 14 נקודות.
- שאלה 6 שאלה חשובית בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 7 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלות 8-9 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות.

בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

14*5+2*10+2*5=70+20+10=100

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

**בהצלחה.**

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{4+bx}$ x משתנה, 0≤b פרמטר.

א. חזור על תהליך הערכת השגיאה כפי שעשינו בכתה, והחלט עבור אלו ערכים של b, טור טיילור מתכנס בקטע [0,0.1].

ב. מהו b המקסימלי מבין אלו שמצאת בסעיף א?

ג. עבור d=b/2 , כאשר את b מצאת בסעיף ב, מצא מהו n שיבטיח כי המרחק שבין פולינום טיילור מסדר n ובין הפונקציה המקורית קטן מ-0.01.

ד. עבור d זה, כתוב את הפולינום.

ה. חשב את השרש בקרוב של 0.01 עבור d שמצאת בסעיף ג וx=0.1.

## שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{1000 + 331x}, 0 \le x \le 1$

□. נניח כי נתונות נקודות $0 = a_0 < a_1 < .... < a_{n-1} < a_n = 1$ וכי $p_n$ הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו $p_n$ בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

## שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^{0.5} \cos(x^2)dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

## שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^3-7x-6$.

א. מצא את שלשת השרשים של p (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר $x^3$ באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $x=g(x)$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

ד. מיהי הנקודה שאליה הסדרה המבוססת על שיטת נקודת השבת מתכנסת הכי מהר?

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3-5x^2+2x+9$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.01.

שאלה 6

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. א. חשב את $\|A\|_\infty$. ב. מצא וקטור v כך

ש- $\|A(v)\|_\infty = \|A\|_\infty$.

## שאלה 7

נסח והוכח את משפט נקודת השבת עבור R אשר משתמש בקבוע ליפשיץ.

## שאלה 8

רוצים לחשב אינטגרל על ידי אינטגרציה נומרית. מה יותר קרוב לתשובה הנכונה: סכום סימפסון המסתמך על m קטעים שוים ועל n=2m חצאי קטעים שוים, או סכום טרפזים המסתמך על n=2m קטעים שוים? השתמש בנוסחאות השגיאה ותוכל להתעלם מהמונים אשר מופיעים בנוסחאות. הגע למסקנה תוך שמוש במכנים בלבד.

## שאלה 9

נתונה הבעיה של פתרון נומרי של המשואה f(x)=0, ונבחרו $x_0,x_1$. בוצע החשוב של סדרה מתכנסת על ידי שיטת המיתר.

כעת החליפו בין $x_0$ ו- $x_1$ . שוב חשבו את הסדרה.

האם שתי הסדרות זהות?

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b) - f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i}(x - a_j)}{\prod_{j \ne i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0) - (x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR=h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h)+f(b)), h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ . אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$ , או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש -$f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n| \leq M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\leq x\leq b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \leq \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $m=\inf f'$, $M=\sup f''$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.

תשובות

תשובה ראשונה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x)=\sqrt{4+bx}=(4+bx)^{1/2},\ f'(x)=\frac{b(4+bx)^{-1/2}}{2},\ f''(x)=\frac{(-1)b^2(4+bx)^{-3/2}}{2^2},$$

$$.....,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)(-3)..(-(2n-3))b^n(4+bx)^{-(2n-1)/2}}{2^n}.$$

$$R(n)=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)(-3)..(-(2n-1))b^{n+1}h^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)![\sqrt{(4+bc)}]^{2n+1}}$$

ולכן:

$$|R(n)|=\frac{1*3*..*(2n-1)b^{n+1}h^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)![\sqrt{(4+bc)}]^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2*1}\frac{3}{2*2}...\frac{2n-1}{2*n}\frac{b^{n+1}h^{n+1}}{2(n+1)[\sqrt{(4+bc)}]^{2n+1}}\le 1*\frac{b^{n+1}h^{n+1}}{2(n+1)[\sqrt{(4+b*0)}]^{2n+1}}=$$

$$=\frac{b^{n+1}0.1^{n+1}}{2(n+1)2^{2n+1}}=\frac{b^{n+1}}{(n+1)10^{n+1}2^{2n+2}}=(\frac{b}{40})^{n+1}\frac{1}{n+1}$$

ולכן הטור יתכנס עבור 0≤b≤40

נציב d=20 ונקבל $\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{n+1}(\frac{20}{40})^{n+1} \le |R(n)|$. נציב ערכים של

n ונראה כי עבור 4≤n החסם קטן מ-0.01.

נחשב את הפולינום הזה:

$$\sqrt{4+dx} \approx (4+d*0)^{1/2} + \frac{d(4+d*0)^{-1/2}h}{2} + \frac{(-1)d^2(4+d*0)^{-3/2}h^2}{2^2*2!}$$
$$+\frac{3d^3(4+d*0)^{-5/2}h^3}{2^3*3!} + \frac{(-15)d^4(4+d*0)^{-7/2}h^4}{2^4*4!} =$$
$$2+\frac{20h}{4}-\frac{400h^2}{64}+\frac{3*8000h^3}{2^8 6}-\frac{15*160000h^4}{2^{11}24} =$$
$$= 2+5h-\frac{25h^2}{4}+\frac{125h^3}{8}-\frac{5^5 h^4}{64}$$

ולבסוף נציב x=h=0.1 ונקבל:

$$\sqrt{4+dx} = \sqrt{4+20*0.1} = \sqrt{6} \approx 2+5*0.1-\frac{25*0.1^2}{4}+$$
$$\frac{125*0.1^3}{8}-\frac{5^5*0.1^4}{64} = 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024} = 2.5+\frac{-64+16-5}{1024} =$$
$$= 2.5-\frac{53}{1024} = \frac{2507}{1024} = 2.448242$$

נשוה עם המחשבון

$$\sqrt{6} \approx 2.4494, R = 0.0012$$

תשובה שניה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x) = \sqrt[3]{1000+331x},\ f'(x) = \frac{331(1000+331x)^{-2/3}}{3},$$

$$f''(x) = \frac{(-2)331^2(1000+331x)^{-5/3}}{3^2},.....,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-2)(-5)..(-(3n-4))331^n(1000+331x)^{-(3n-1)/3}}{3^n}.$$

$$R(n) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(-2)(-5)..(-(3n-1))331^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{1000+331x}^{3n+2}}$$

ולכן

$$|R(n)| = \frac{|(-2)(-5)..(-(3n-1))|\,331^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{1000+331c}^{3n+2}} =$$

$$= \frac{2}{3*1}\frac{5}{3*2}...\frac{3n-1}{3*n}\frac{331^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3(n+1)\sqrt[3]{1000+331c}^{3n+2}} \le$$

$$1*\frac{331^{n+1}1*1*...*1}{3(n+1)\sqrt[3]{1000+331*0}^{3n+2}} \le \frac{331^{n+1}}{3(n+1)10^{3n+2}} =$$

$$= \frac{10*331^{n+1}}{3(n+1)10^{3n+3}} = \frac{10}{3(n+1)}\frac{331^{n+1}}{10^{3n+3}} = \frac{10}{3(n+1)}(\frac{331}{1000})^{n+1}$$

$$\le \frac{10}{3(n+1)}(\frac{333.333}{1000})^{n+1} \le \frac{10}{3(n+1)}(\frac{1}{3})^{n+1} = \frac{10}{(n+1)3^{n+2}}$$

ולכן:

$$|R(n)| \le \frac{10}{(n+1)3^{n+2}} < \frac{1}{1000} \to 10000 < (n+1)3^{n+2}$$

כיון שהבטוי האחרון הוא פונקציה עולה של n מספיק לבדוק על ידי הצבה מהו ה-n הראשון שבו הוא עובר את 10000. נציב ונראה כי n=5 הוא הראשון.

תשובה שלישית

נגזור ונקבל:

$$f=\cos(x^2),\ f'=-2x\sin(x^2),\ f''=-2\sin(x^2)-4x^2\cos(x^2),$$
$$f'''=-4x\cos(x^2)-8x\cos(x^2)+8x^3\sin(x^2)=-12x\cos(x^2)+8x^3\sin(x^2),$$
$$f''''=-12\cos(x^2)+24x^2\sin(x^2)+24x^2\sin(x^2)+16x^4\cos(x^2)=$$
$$=-12\cos(x^2)+48x^2\sin(x^2)+16x^4\cos(x^2)=$$
$$=(16x^4-12)\cos(x^2)+48x^2\sin(x^2).$$

ולכן:

$$|f''''|=|(16x^4-12)\cos(x^2)+48x^2\sin(x^2)|\le|(16x^4-12)||\cos(x^2)|$$
$$+|48x^2||\sin(x^2)|\le|(16x^4-12)|+|48x^2|.$$

בתחום $[0,0.5]$ המחובר $48x^2$ הוא חיובי והמחובר $16x^4-12$ הוא שלילי, ולכן נקבל סוף סוף כי $g(x)=|f''''|=12-16x^4+48x^2$. נחשב את הנגזרת של פונקציה זו כדי למצוא את הנקודה המרבית שלה ונקבל כי

$$g(x)=|f''''|=12-16x^4+48x^2,$$
$$g'(x)=-64x^3+96x=32x(3-2x^2).$$

ובתחום שלנו שני הכופלים של הבטוי האחרון חיוביים, לכן הנגזרת חיובית, לכן g עולה ולכן הנקודה המרבית שלה היא כאשר x=0.5 ולכן:

$$|f''''(c)|\le|f''''(0.5)|=12-16(0.5)^4+48(0.5)^2=12-1+12=23$$

ולכן: $$|R|=\frac{|f''''(c)|(b-a)^5}{180n^4}\le\frac{23(0.5)^5}{180n^4}\le\frac{24}{180n^4 32}=\frac{1}{240n^4}$$

ולכן:

$$|R| \leq \frac{1}{240n^4} \leq \frac{1}{1000} \to \frac{1000}{240} = \frac{25}{6} = 4.166 \leq n^4 \to 1.248 \leq n \to 2 < n$$

כיון ש-n חיב להיות זוגי, נובע כי

$$4 \leq n \to 2 \leq \frac{n}{2} = m$$

תשובה רביעית

ולכן: $p(x) = x^3 - 7x - 6 \to p(1) = -12, p(-1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

ולכן:

$$a = 1, c = -6, 1 + b = 0, b - 6 = -7 \to b = -1.$$

ולכן:

$$p(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x+2)(x-3).$$

כלומר מצאנו את השרשים של f.

כעת נעביר את 7x-6- ונקבל:

$$x^3 = 7x + 6 \to x = \sqrt[3]{7x+6} = g(x).$$

כעת נגזור את g ונציב את נקודות השבת בנגזרת:

$$g(x) = \sqrt[3]{7x+6} \to g'(x) = \frac{7}{3(\sqrt[3]{7x+6})^2} = \frac{7}{3g^2}$$

ולכן:

$$g'(-1) = \frac{7}{3g(1)^2} = \frac{7}{3*1^2} = \frac{7}{3} > 1, g'(-2) = \frac{7}{3g(2)^2} = \frac{7}{3*2^2} = \frac{7}{12} < 1,$$
$$g'(3) = \frac{7}{3g(3)^2} = \frac{7}{3*3^2} = \frac{7}{27} < 1$$

לכן 1 היא נקודה דוחה, 2,3 הן נקודות מושכות, ו-3 מושכת יותר כי הערך המוחלט של הנגזרת שלה הוא הקטן ביותר.

תשובה חמישית

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+9,\ f(0)=9,\ f(1)=7,\ f(2)=1,\ f(3)=-3,\ f(4)=1$$

ולכן נראה האם הקטע [3,4] אפשרי

נחשב נגזרות:

$$f'(x)=3x^2-10x+2,\ f''(x)=6x-10$$

קל לראות כי הנגזרת השניה חיובית בקטע זה  נציב בנגזרת הראשונה:

$$f'(x)=3x^2-10x+2,\ f'(3)=-1,\ f'(4)=10.$$

כיון ש-'f עולה (שכן נגזרתה חיובית), נוכל להקטין קצת את הקטע  ואכן:

$$f'(x)=3x^2-10x+2,\ f'(3.2)=0.72.$$

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+9,\ f(3.2)=32.768-51.2+6.4+9=47.968-51.2=-4.032$$

לכן נבחר את הקטע להיות [3.2,4]  ונחשב את החסמים

$$m = inf\,(f\,') = f\,'(3.2) = 0.72.$$
$$M = \sup(f\,'') = f\,''(4) = 6\cdot 4 - 10 = 14,$$
$$|x_{n+1} - x_n|^2 < \frac{1.44}{1400} = 0.00102 \rightarrow |x_{n+1} - x_n| < 0.032$$

כלומר עלינו למצא קרובים עוקבים אשר מרחקם קטן מ32/1000.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f\,'(x)} = x - \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 9}{3x^2 - 10x + 2} = \frac{2x^3 - 5x^2 - 9}{3x^2 - 10x + 2}$$

לפי המשפט נציב $x_0=4$ ונקבל:

$$g(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 9}{3x^2 - 10x + 2}, x_0 = 4 \rightarrow x_1 = \frac{39}{10}, x_2 = \frac{2(39/10)^3 - 5(39/10)^2 - 9}{3(39/10)^2 - 10(39/10) + 2} =$$
$$\frac{2*39^3 - 5*39^2*10 - 9000}{30*39^2 - 39000 + 2000} = \frac{2*59319 - 50*1521 - 9000}{30*1521 - 39000 + 2000} = \frac{33588}{8630} =$$
$$= 3.892004635$$

מתקים $|x_2 - x_1| = 0.008 < 0.032$ ולכן $x_2$ הוא הדרוש.

תשובה שישית

לפי טענה בספר יש לעבור עמודה עמודה של A ולסכם את הערכים המוחלטים של האיברים בכל עמודה, ואז לקחת את המכסימלי. עבור העמודה הראשונה יוצא 12, שניה 15 ושלישית 18, ולכן המכסימום שהוא גם הנורמה הוא 18. נביט בוקטור (1,-1,1). נורמת המקסימום שלו היא 1, ומכפלת A בו יוצאת 18, כמו הנורמה.

תשובה שמינית

נביט על המכנים בלבד. נשווה בין $\frac{1}{12n^2}$ ובין: $\frac{1}{180n^4}$. אם נציב 2n במקום n בנוסחה הראשונה נקבל $\frac{1}{12(2n)^2}=\frac{1}{48n^2}$ ובטוי זה גדול יותר מהשגיאה של שיטת סימפסון.

תשובה תשיעית

כפי שלמדנו בכתה, אם $x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

ביחוד:

נבחר: $f(x)=x^2-4, x_0=1, x_1=3,\ f(x_0)=-3,\ f(x_1)=5$

$$x_2=x_{1+1}=\frac{x_1 f(x_0)-x_0 f(x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}=\frac{3(-3)-1(5)}{-3-5}=\frac{-14}{-8}=\frac{7}{4},\ f(x_2)=\frac{-15}{16}$$

וכמו כן:

$$x_3=x_{2+1}=\frac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}=\frac{\frac{7}{4}5-3(\frac{-15}{16})}{5-(\frac{-15}{16})}=\frac{140+45}{80+15}=\frac{185}{95}=\frac{37}{19}$$

כעת נחליף את השנים הראשונים ונקרא לסדרה החדשה y.

$y_0=3, y_1=1,\ f(y_0)=5,\ f(y_1)=-3$

$$y_2=y_{1+1}=\frac{y_1 f(y_0)-y_0 f(y_1)}{f(y_0)-f(y_1)}=\frac{1(5)-3(-3)}{5-(-3)}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4},\ f(y_2)=\frac{-15}{16}$$

כלומר האבר השני  אשר מתקבל בשתי הסדרות זהה.

ומה ביחס לאבר השלישי?

$$y_3 = y_{2+1} = \frac{y_2 f(y_1) - y_1 f(y_2)}{f(y_1) - f(y_2)} = \frac{\frac{7}{4}(-3) - 1(\frac{-15}{16})}{-3-(\frac{-15}{16})} = \frac{-84+15}{-48+15} = \frac{-69}{-33} = \frac{23}{11}$$

האם האבר השלישי שוה?

$$\frac{23}{11} = \frac{37}{19} \rightarrow 23*19 = 11*37 \rightarrow 437 = 407$$

כלומר האבר השלישי שונה.