דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש -$f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_nf(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$,
$M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p)=\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

יום ו, ב אדר א התשס"ה 11-2-2005 מבחן מועד א באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 2 חלקים. בחלק הראשון 5 שאלות בנות 39 סעיפים ביחד. כל סעיף שוה 2 נקודות וסה"כ 78 נקודות. בחלק השני 3 שאלות בנות 7 נקודות כ"א, וסה"כ 21 נקודות. הציון המקסימלי במבחן הוא 99 .

בהצלחה.

טור א

1. הבט בפונקציה $f(x)=x^2-4$ בקטע $[a0=-1,b0=15]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. b1= , a1=

ב. b2= , a2=

ג. b3= , a3=

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את en=bn-p כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. ,e3= ,e2= ,e1= e0=

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

e3/e2= , e2/e1= e1/e0=,

תשובה לטור א

א. b1= 7 , a1= -1

ב. b2= 3 , a2= -1

ג. b3= 3 , a3= 1

ד. ,e3=1 ,e2=1 ,e1=5 e0=13

ה. e3/e2=1 , e2/e1=0.2 e1/e0=0.384

טור ב

1. הבט בפונקציה $f(x)=x^2-9$ בקטע $[a0=-2,b0=14]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. $b1=$, $a1=$

ב. $b2=$, $a2=$

ג. $b3=$, $a3=$

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את $en=bn-p$ כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. $e3=$, $e2=$, $e1=$, $e0=$

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

$e3/e2=$, $e2/e1=$, $e1/e0=$

תשובה לטור ב

א. $b1= 6$, $a1= -2$

ב. $b2= 6$, $a2= 2$

ג. $b3= 4$, $a3= 2$

ד. $e3=1$, $e2=3$, $e1=3$, $e0=11$

ה. $e3/e2=0.333$, $e2/e1=1$, $e1/e0=0.2727$

2. טור א

הבט על x^2-9 ו $x0=14$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x1=$

ב. $x2=$

ג. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $en=xn-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e0=$, $e1=$, $e2=$, $e3=$

ה. חשב את $en+1/en$ $e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $en+1/(en)^2$
$e1/(e0)^2=$, $e2/(e1)^2=$, $e3/(e2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?
תשובה:

תשובה לטור א

א. $x1= (205/28)=7.32$

ב. $x2=49081/11480=4.28$

ג. $x3=3.19$

ד. $e0=11$, $e1=4.32$, $e2=1.28$, $e3=0.19$

ה. $e1/e0=0.39$, $e2/e1=0.297$, $e3/e2=0.148$

ו. תשובה: 0

ז. $e1/(e0)^2=0.0357$, $e2/(e1)^2=0.0685$, $e3/(e2)^2=0.1159$

ח. תשובה: 0.1666

2. טור ב

הבט על x^2-4 ו $x0=15$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x1=$

ב. $x2=$

ג. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $en=xn-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e0=$, $e1=$, $e2=$, $e3=$

ה. חשב את $en+1/en$ $e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $en+1/(en)^2$

$e1/(e0)^2=$, $e2/(e1)^2=$, $e3/(e2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?
תשובה:

תשובה לטור ב

א. $x1=229/30=7.63333$

ב. $x2=56041/13740=4.078$

ג. $x3=2.529$

ד. $e0=13$, $e1=5.633$, $e2=2.078$, $e3=0.529$

ה. $e1/e0=0.433$, $e2/e1=0.368$, $e3/e2=0.254$

ו. תשובה:0

ז. $e1/(e0)^2=0.0333$, $e2/(e1)^2=0.0654$, $e3/(e2)^2=0.1225$

ח. תשובה: 0.25

3. טור א

הבט ב- $f(x)=x^3-9x^2+26x-24=(x-2)(x-3)(x-4)$.

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x0 קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב $x0=1$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $xn+1=g(xn)$.

ה. $x1=$

ו. $x2=$

ז. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $en=xn-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e0=$, $e1=$, $e2=$ $e3=$

ט. חשב את $en+1/en$, $e3/e2=$, $e2/e1=$ $e1/e0=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

א. תשובה: $g(x)=\sqrt[3]{(9x^2-26x+24)}$

ב. הנקודות הן:2,3,4

ג. הנקודות הללו הן :2,4

ד. הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין): 3

ה. $x1=\sqrt[3]{7}=1.9128$

ו. $x2=1.9305$

ז. $x3=1.94406$

ח. $e0=-1$, $e1=-0.0872$, $e2=-0.0695$ $e3=-0.05594$

ט. $e1/e0=0.0872$, $e2/e1=0.79701$, $e3/e2=0.8048$

י. תשובה: $5/6=0.8333$

3. טור ב

הבט ב-$f(x)=x^3-12x^2+44x-48=(x-2)(x-4)(x-6)$.

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x0 קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב x0=1 וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי xn+1=g(xn) .

ה. x1=

ו. x2=

ז. x3=

חשב במחברתך את ההפרשים en=xn-p כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. e0= , e1= , e2= e3=

ט. חשב את e_{n+1}/e_n $e_3/e_2=$, $e_2/e_1=$, $e_1/e_0=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

א. תשובה: $g(x)=\sqrt[3]{12x^2-44x+48}$

ב. הנקודות הן:2,4,6

ג. הנקודות הללו הן :2,6

ד. הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):4

ה. $x_1=\sqrt[3]{16}=2.519839$

ו. $x_2=2.37039$

ז. $x_3=2.2323$

ח. $e_3=0.2323$ $e_2=0.3703$, $e_1=0.5198$, $e_0=-1$

ט. $e_3/e_2=0.6227$, $e_2/e_1=0.7123$, $e_1/e_0=-0.5198$

י. תשובה: $1/3=0.3333$

שאלה 4

בשאלה זו תתבקש לחשב לחשב סכום טרפזים המבוסס על n קטעים שוים של x^3 על הקטע [1,5] בצע את החשוב במחברתך. סכום הטרפזים נתן לבטוי על ידי 6 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. תת הסכום הששי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום הטרפזים.

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

ט. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום טרפזים, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

י. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ט קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

תשובה לשאלה 4

$$ST=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{4k}{n})^3+f(b)\right)=$$

$$=\frac{4}{2n}(1+2\sum_{k=1}^{n-1}(1+3\frac{4k}{n}+3\frac{16k^2}{n^2}+\frac{64k^3}{n^3})+125)=$$

$$=\frac{2}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{4}{n}+\frac{48k}{n^2}+\frac{192k^2}{n^3}+\frac{256k^3}{n^4})+\frac{250}{n}=$$

$$=\frac{2}{n}+4\frac{n-1}{n}+\frac{48}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}+\frac{192}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{256}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}+\frac{250}{n}=$$

$$=\frac{2}{n}+4\frac{n-1}{n}+\frac{24(n-1)}{n}+\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{64(n-1)^2}{n^2}+\frac{250}{n}=$$

$$=\frac{252}{n}+\frac{28(n-1)}{n}+\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{64(n-1)^2}{n^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}28+64+64=156=\int_1^5 x^3dx.$$

א. 2/n

ב. 4(n-1)/n

ג. 24(n-1)/n

ד. $32(n-1)(2n-1)/n^2$

ה. $64(n-1)^2/n^2$

ו. $250/n$

$$E(ST)=28+64+64-$$

$$[\frac{252}{n}+\frac{28(n-1)}{n}+\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{64(n-1)^2}{n^2}]=$$

$$=28[1-\frac{(n-1)}{n}]+32[2-\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}]+64[1-\frac{(n-1)^2}{n^2}]-\frac{252}{n}=$$

$$=\frac{28}{n}+\frac{32(3n-1)}{n^2}+\frac{64(2n-1)}{n^2}-\frac{252}{n}=$$

$$=\frac{4}{n^2}(7n+8(3n-1)+16(2n-1)-63n)=\frac{4(0\cdot n-24)}{n^2}=\frac{-96}{n^2}.$$

ז. $96/n^2$

ח. $96/n^2<0.001\rightarrow 96000<n^2\rightarrow 310<n$

$$R(ST)=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}=\frac{6c(4)^3}{12n^2}=\frac{32c}{n^2}\le\frac{160}{n^2}$$

ז. $160n^2$

ח. $160/n^2<0.001\rightarrow 160000<n^2\rightarrow 400<n$

שאלה 5 טור א.

נתונה המשואה $x^3-9x^2+24x-15=0$.

א. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

ד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

ה. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

ו. מצא קרוב לשרש. תשובה:

תשובות לטור א. א. קל לראות כי $f(0)=-15<0,\ f(1)=1>0$ ולכן יש שרש בקטע $[0,1]$.
ב. נשאיר את $24x$ בצד אחד, נעביר את כל שאר המחוברים לצד שני ונקבל: $g(x)=[15+9x^2-x^3]/24$.

ג. נחשב את הנגזרת $g'(x)=(18x-3x^2)/24=(6x-x^2)/8$. נשים לב כי $g'(0)=0,g'(1)=5/8$ כלומר בקטע זה $M=5/8=0.625$. עוד נשים לב כי $g(0)=15/24,g(1)=23/24$ כלומר מתקיימים תנאי המשפט.
ד. $|En|\leq(0.625)^n(1-0)$. ה. $(5/8)^5<0.1$ ולכן $(5/8)^{10}<0.01$. נבדק במחשבון $(0.625)9=0.14$ ולכן ה-n הראשון הוא $n=10$.

שאלה 5 טור ב.

נתונה המשוואה $x^3-12x^2+42x-25=0$.

א. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

ד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

ה. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

ו. מצא קרוב לשרש. תשובה:

תשובות לטור ב. א. קל לראות כי $f(0)=-25<0, f(1)=6>0$ ולכן יש שרש בקטע [0,1] .
ב. נשאיר את 42x בצד אחד, נעביר את כל שאר המחוברים לצד שני ונקבל: $g(x)=[25+12x^2-x^3]/42$.

ג. נחשב את הנגזרת $g'(x)=(24x-3x^2)/42=(8x-x^2)/14$. נשים לב כי $g'(0)=0,g'(1)=7/14$ כלומר בקטע זה $M=1/2=0.5$. עוד נשים לב כי $g(0)=25/42,g(1)=36/42$ כלומר מתקיימים תנאי המשפט.

ד. $|En|\le(0.5)^n(1-0)$. ה.נשים לב כי $(1/2)^7<0.01$. לכן ה-n הראשון הוא $n=7$.

חלק ב

בחלק זה השאלות לא חיבות להיות דומות לאף שאלה שהכרנו, אם כי הן קשורות כמובן לחומר שלמדנו.

שאלה 6

מהו c כך שבשאלה 4 יהיה שויון בנוסחה $E(ST)=f''(c)(b-a)^3/12n^2$?

תשובה: $32c/n^2=96/n^2\rightarrow c=3$

שאלה 7

נניח כי נתונות 4 מספרים $a0<a1<a2<a3$ וכי אנו מחשבים את פולינום האינטרפולציה העובר דרך $(a0,f(a0)),(a1,f(a1)),(a2,f(a2)),(a3,f(a3))$.

מה מספר פעולות הכפל+מספר פעולות החלוק (נא להתעלם ממספר פעולות החבור והחסור) שיש לבצע בדרכים הבאות? הנח כי כל חשוב הוא כללי ביותר.

א. פתרון מקדמי הפולינום על ידי מערכת משואות לינארית, שאותה פותרים לפי שיטת קרמר. תשובה:

תשובה: חשוב כל דטרמיננט 4x4 כרוך ב-!4 פעולות כפל. חשוב דטרמיננט vdm כרוך ב-6 פעולות כפל סה"כ עד כאן 102 פעולות, וכן יש לחלק כל דטרמיננט ב-vdm ולכן סה"כ 106 פעולות כפל וחלוק.

ב. נוסחת לגרנז.

תשובה: בכל פולינום עזר (כזה שמתאפס בכל הנקודות למעט אחת ושוה 1 באותה נקודה) יש במכנה 3 פעולות כפל, ובמונה, (אם משתמשים בנוסחאות), יש 5 כפלים. עד הנה 8 . כעת שמחלקים את f(a) במכנה יש חלוקה יחידה, ומקדם זה כופלים בארבעת הבטויים שבמונה, ולכן סה"כ 13 כפלים וחלוקים.

כעת נכפל זאת פי 4 כיון שפולינום לגרנז כולל ארבעה מחוברים ונקבל סה"כ 52 כפלים וחלוקות-פחות מחצי של הדרך הקודמת.

שאלה 8

נתונה הפונקציה $y=x^3$.

א. חשב את פולינום מקלורן עד סדר 2 שלה. נסמן אותו $p(x)$

ב. חשב את פולינום האינטרפולציה מסדר 2 שלה המזדהה עם הפונקציה בנקודות $a=0,b=1/n,c=2/n$. נסמן אותו $q(x)$.

ג. ה-n הקטן ביותר כך שמתקים $|p_n(0)-q_n(0)|<0.001$ הוא:

ד. ה-n הקטן ביותר כך שמתקים $|p_n(1)-q_n(1)|<0.001$ הוא:

תשובה

א. $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ ולכן $p\equiv 0$.

ב.

$$q=\frac{(x-{}^{1}\!/_{n})(x-{}^{2}\!/_{n})}{(0-{}^{1}\!/_{n})(0-{}^{2}\!/_{n})}0+\frac{(x-{}^{1}\!/_{n})(x-0)}{({}^{2}\!/_{n}-{}^{1}\!/_{n})({}^{2}\!/_{n}-0)}\frac{8}{n^3}+$$

$$+\frac{(x-{}^{2}\!/_{n})(x-0)}{({}^{1}\!/_{n}-{}^{2}\!/_{n})({}^{1}\!/_{n}-0)}\frac{1}{n^3}=0+\frac{8(x^2-{}^{x}\!/_{n})}{{}^{2}\!/_{n^2}\,n^3}+$$

$$+\frac{(x^2-{}^{2x}\!/_{n})}{-{}^{1}\!/_{n^2}\,n^3}=\frac{4(x^2-{}^{x}\!/_{n})}{n}-\frac{(x^2-{}^{2x}\!/_{n})}{n}=$$

$$=\frac{3x^2}{n}-\frac{2x}{n^2}$$

ואכן פולינום זה עובר בכל שלש הנקודות כפי שאפשר לבדוק בקלות.

ג. $q(0)=p(0)=0$ לכל n . ד. $p(1)=0,q(1)=3/n-2/n^2$, ולכן מקבלים אי שויון $3/n-2/n^2<0.001$ ששקול ל- $0<n^2-3000n+2000$ אשר פתרונו הוא $2998<n$, כלומר ה-n הקטן ביותר הוא 2999 .