המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתו.</u>

יום ב, ו אדר התשס"ט 2-3-2009

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 14 נקודות.
- שאלה 6 שאלה חשובית בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 7 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלות 8-9 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות. בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

14*5+2*10+2*5=70+20+10=100

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+bx}$ x משתנה, 0≤b פרמטר.

א. חזור על תהליך הערכת השגיאה כפי שעשינו בכתה, והחלט עבור אלו ערכים של b, טור טיילור מתכנס בקטע [0,0.1].

ב. מהו b המקסימלי מבין אלו שמצאת בסעיף א?

ג. עבור d=b/2 , כאשר את b מצאת בסעיף ב, מצא מהו n שיבטיח כי המרחק שבין פולינום טיילור מסדר n ובין הפונקציה המקורית קטן מ-0.01.

ד. עבור d זה, כתוב את הפולינום.

ה. חשב את השרש בקרוב של 0.01 עבור d שמצאת בסעיף ג וx=0.1.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{125+91x}, 0\le x\le 1$

א. נניח כי נתונות נקודות $0 = a_0 < a_1 < .... < a_{n-1} < a_n = 1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_{0.5}^{1} \frac{e^x}{x} dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפונקציה $f(x)=x^3-8$ בקטע $[a_0=1,b_0=4]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך:

א. כתוב את כל שלשת הקטעים הראשונים.
ב. כמה שלבים יש להשתמש בשיטה עד שהמרחק b_n-a_n יהיה קטן מ-0.01?

שאלה חמישית

הבט בפונקציה $f(x)=x^3-8$ וב- $x_0=1$. השתמש בשיטת ניוטון רפסון וחשב שלשה שלבים במחברתך:

ג. כתוב את x_1, x_2, x_3 .
ד. כמה שלבים יש להשתמש בשיטה עד שהמרחק שבין x_n ובין הפתרון הנכון יהיה קטן מ-0.01?

שאלה שישית

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. א. חשב את $\|A\|_\infty$. ב. מצא וקטור v כך

ש- $\|A(v)\|_\infty = \|A\|_\infty$.

שאלה שביעית

נתונה פרבולת אינטרפולציה אשר עוברת בנקודות

$$(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})), (b, f(b)).$$

הוכח מהו השטח שהיא כולאת בין a ל-b.

שאלה שמינית

רוצים לחשב אינטגרל I לאורך קטע [a,b] על ידי אינטגרציה נומרית. חשבנו קרוב על ידי SR(n,l), סכום רימן המבוסס על n קטעים בעלי אורך קטע זהה ונקודת בינים בשמאל. נסמן ב E(l) את השגיאה האמיתית- .I-SR(n,l) . באותה צורה מוגדר SR(n,r), סכום רימן המבוסס על n קטעים בעלי אורך קטע זהה ונקודת בינים בימין, ו E(r) השגיאה האמיתית- .I-SR(n,r). מצא קשר בין הגדלים E(l) ו-E(r).

שאלה תשיעית

תן דוגמא למשואה f(x)=0 ולנחוש x_0 כך שאם ננסה את שיטת ניוטון רפסון עם אותו נחוש התחלתי הסדרה תתבדר.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0) q_0(x) + \cdots + f(a_n) q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i} (x - a_j)}{\prod_{j \ne i} (a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0) - (x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1}), a=x_0\le c_1\le x_1\le c_2\le x_2\le\cdots x_n=b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR=h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a=x_0\le c_1\le x_1=a+h\le c_2\le x_2=a+2h\le\cdots x_n=a+nh=b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h)+f(b)), h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיך):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n|\le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \leq \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $M=\sup f''$, $m=\inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.

תשובות

תשובה ראשונה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x)=\sqrt[3]{64+bx}=(64+bx)^{1/3},\ f'(x)=\frac{b(64+bx)^{-2/3}}{3},\ f''(x)=\frac{(-2)b^2(64+bx)^{-5/3}}{3^2},$$

$$.....,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-4))b^n(64+bx)^{-(3n-1)/3}}{3^n}.$$

$$R(n)=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-1))b^{n+1}h^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)![\sqrt[3]{64+bc}]^{3n+2}}$$

ולכן:

$$|R(n)|=\frac{2*5..*(3n-1)b^{n+1}h^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)![\sqrt[3]{64+bc}]^{3n+2}}=$$

$$=\frac{2}{3*1}\frac{5}{3*2}...\frac{3n-1}{3*n}\frac{b^{n+1}h^{n+1}}{3(n+1)[\sqrt[3]{64+bc}]^{3n+2}}\le 1*\frac{b^{n+1}h^{n+1}}{3(n+1)[\sqrt[3]{64+b*0}]^{3n+2}}=$$

$$=\frac{b^{n+1}0.1^{n+1}}{3(n+1)4^{3n+2}}=\frac{4*b^{n+1}}{3(n+1)10^{n+1}4^{3n+3}}=(\frac{b}{640})^{n+1}\frac{4}{3(n+1)}$$

ולכן הטור יתכנס עבור 0≤b≤640

נציב d=320 ונקבל

$|R(n)|\le(\frac{320}{640})^{n+1}\frac{4}{3(n+1)}=\frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}=\frac{1}{3(n+1)2^{n-1}}$. נציב ערכים

של n ונראה כי עבור 4≤n החסם קטן מ-0.01.

נחשב את הפולינום הזה:

$$\sqrt[3]{64+320x}=\sqrt[3]{64(1+5x)}=4\sqrt[3]{1+5x}\approx 4[(1+5*0)^{1/3}+\frac{5(1+5*0)^{-2/3}h}{3}+$$

$$+\frac{(-2)25(1+d*0)^{-5/3}h^2}{3^2*2!}+\frac{10*125(1+5*0)^{-8/3}h^3}{3^3*3!}+\frac{(-80)*625(1+5*0)^{-11/3}h^4}{3^4*4!}]=$$

$$4[1+\frac{5h}{3}-\frac{25h^2}{9}+\frac{625h^3}{81}-\frac{6250h^4}{243}]=4+\frac{20}{3}h-\frac{100h^2}{9}+\frac{2500h^3}{81}-\frac{25000h^4}{243}$$

ולבסוף נציב x=h=0.1 ונקבל:

$$4\sqrt[3]{1+5*0.1}\approx 4+\frac{20}{3}0.1-\frac{100*0.1^2}{9}+\frac{2500*0.1^3}{81}-\frac{25000*0.1^4}{243}=$$

$$=4+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{162}-\frac{5}{486}=\frac{1944+324-54+15-5}{486}=\frac{2224}{486}=\frac{1112}{243}=$$

$$=4.576131$$

נשווה עם המחשבון

$$4\sqrt[3]{1.5}\approx 4.57885697, R=0.002728<0.01$$

תשובה שניה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x)=\sqrt[3]{125+91x},\ f'(x)=\frac{91(125+91x)^{-2/3}}{3},$$

$$f''(x)=\frac{(-2)91^2(125+91x)^{-5/3}}{3^2},.....,$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-4))91^n(125+91x)^{-(3n-1)/3}}{3^n}.$$

$$R(n)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-1))91^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{125+91c}^{3n+2}}$$

ולכן

$$|R(n)|=\frac{|(-2)(-5)..(-(3n-1))|91^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{125+91c}^{3n+2}}=$$

$$=\frac{2}{3*1}\frac{5}{3*2}...\frac{3n-1}{3*n}\frac{91^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3(n+1)\sqrt[3]{125+91c}^{3n+2}}\le$$

$$1*\frac{91^{n+1}1*1*...*1}{3(n+1)\sqrt[3]{125+91*0}^{3n+2}}\le\frac{91^{n+1}}{3(n+1)5^{3n+2}}=$$

$$=\frac{5*91^{n+1}}{3(n+1)5^{3n+3}}=\frac{5}{3(n+1)}\frac{91^{n+1}}{5^{3n+3}}=\frac{5}{3(n+1)}(\frac{91}{125})^{n+1}$$

$$\le\frac{5}{3(n+1)}(\frac{100}{125})^{n+1}\le\frac{5}{3(n+1)}(\frac{4}{5})^{n+1}.$$

ולכן:

$$|R(n)| \le \frac{5}{3(n+1)}\frac{4^{n+1}}{5^{n+1}} < \frac{1}{1000} \to \frac{5000}{3} < \frac{(n+1)5^n}{4^n}$$

כיון שהבטוי האחרון הוא פונקציה עולה של n מספיק לבדוק על ידי הצבה מהו ה-n הראשון שבו הוא עובר את 5000/3. נציב ונראה כי n=19 הוא הראשון.

פתרון יותר טוב של מאירוב עוזיאל

$$|R(n)| \le \frac{5}{3(n+1)}(\frac{91}{125})^{n+1} \le \frac{5}{3(n+1)}(\frac{93.75}{125})^{n+1} \le \frac{5}{3(n+1)}(\frac{3}{4})^{n+1}.$$

ויוצא n=16.

פתרון שלישי עוד יותר טוב של דובי ויזן. בודקים את $\frac{5}{3(n+1)}(\frac{91}{125})^{n+1}$

ויוצא n=9.

תשובה שלישית

יש להעריך את הנגזרת הרביעית של f. נגזור ונקבל:

$$f=\frac{e^x}{x},\ f'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=f=\frac{e^x}{x},\ f'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

$$f''=\frac{[e^x(x-1)+e^x]x^2-2xe^x(x-1)}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

$$f'''=\frac{[e^x(x^2-2x+2)+(2x-2)]x^3-3x^2(e^x(x^2-2x+2))}{x^6}=$$

$$=\frac{e^x(x^3-3x^2+6x-6)}{x^4}.$$

$$f''''=\frac{x^4[e^x((x^3-3x^2+6x-6)+(3x^2-6x+6))]-4x^3e^x(x^3-3x^2+6x-6)}{x^8}.$$

$$f''''=\frac{e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)}{x^5}$$

כדי לחסום את הנגזרת הרביעית יש לחקור אותה, כלומר לחשב את הנגזרת החמישית. קל לראות באינדוקציה כי:

$$f'''''=\frac{e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)}{x^6}$$

נציג את הנגזרת החמישית בצורה:

$$\frac{e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)}{x^6}=\frac{e^x(x^4(x-5)+20x^2(x-3)+120(x-1))}{x^6}$$

ובטוי זה הוא שלילי כי כל אחד מהסוגרים שבמונה שלילי בתחום $x<1$. לכן הנגזרת החמישית שלילית בתחום, ולכן הנגזרת הרביעית יורדת בתחום.

נציג את הנגזרת הרביעית בצורה:

$$f'''' = \frac{e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)}{x^5} = \frac{e^x(x^4+4x^2(3-x)+24(1-x))}{x^5}$$

ולכן, כיון שכל סוגר במונה חיובי בתחום שלנו, הנגזרת הרביעית חיובית

ויורדת ולכן ערכה המוחלט הגדול ביותר הוא בשמאל הקטע, כלומר אפשר

להציב בה x=0.5 ולקבל חסם עבור ערכה המוחלט:

$$f'''' = \frac{e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)}{x^5},\ f''''(0.5) = \frac{e^{0.5}(1/16-1/2+3-12+24)}{1/32} =$$

$$= \sqrt{e}(2-16+480) = 466\sqrt{e} = 768.304$$

ערך זה נציב בנוסחת הערכת השגיאה ונקבל:

$$\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4} \le \frac{466\sqrt{e}(1-0.5)^5}{180n^4} = \frac{233\sqrt{e}}{2880n^4} < \frac{1}{1000} \to$$

$$133.386 < n^4 \to 3.39 < n \to 4 \le n \to 2 \le m$$

תשובה רביעית

א.נחשב ונקבל:

$$f(x) = x^3-8, [a_0=1, b_0=4] \to c=2.5,\ f(c)>0, [a_1=1, b_1=2.5] \to c=1.75,$$
$$f(c)<0, [a_2=1.75, b_2=2.5] \to c=2.125,\ f(c)>0, [a_3=1.75, b_3=2.125] \to$$
$$c=1.9375,\ f(c)<0, [a_4=1.9375, b_4=2.125].$$

ב.

$$b_0 - a_0 = 3, b_n - a_n = \frac{3}{2^n} < 0.01 \rightarrow 300 < 2^n \rightarrow 9 < n$$

תשובה חמישית

$$f(x) = x^3 - 8, g(x) = x - \frac{x^3 - 8}{3x^2} = \frac{2x^3 + 8}{3x^2},$$
$$x_0 = 1, x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{554}{225} = 2.46, x_3 = 2.081, x_4 = 2.003$$

ורואים כי האבר הרביעי כבר קרוב לתשובה הנכונה בשלוש אלפיות שקטן ממאית.

תשובה שישית

לפי טענה בספר יש לעבור שורה שורה של A ולסכם את הערכים המוחלטים של האיברים בכל שורה, ואז לקחת את המכסימלי. עבור השורה הראשונה יוצא 6, שניה 7 ושלישית 8, ולכן המכסימום שהוא גם הנורמה הוא 8. נביט בוקטור (1,-1,-1). נורמת המקסימום שלו היא 1, ומכפלת A בו יוצאת 8, כמו הנורמה.

תשובה שמינית

$$E(l)=\int_a^b f(t)dt-h\sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h), E(r)=\int_a^b f(t)dt-h\sum_{i=1}^n f(a+ih),$$

$$E(l)-E(r)=[\int_a^b f(t)dt-h\sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h),)-(\int_a^b f(t)dt-h\sum_{i=1}^n f(a+ih),]=$$

$$=h\sum_{i=1}^n f(a+ih),-h\sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h),=h(\sum_{i=1}^n f(a+ih),-\sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h),)=$$

$$=h(f(b)-f(a))=\frac{(b-a)}{n}(f(b)-f(a))=\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

תשובה תשיעית

נביט על $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. הפונקציה איננה בדיוק פעמון גאוס אך קשורה אליה. נבצע חקירה: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}, f'(x)=\frac{(1+x^2)-2xx}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$
לכן הפונקציה עולה כאשר $-1\le x\le 1$ ויורדת עבור כל x אחר. יש לה מכסימום מקומי ומוחלט בנקודה (1,0.5), מינימום מקומי ומוחלט בנקודה (-1,-0.5), היא עוברת בראשית, היא פונקציה אי זוגית, וכמו כן כאשר x שואף ל-$\pm\infty$ אז y שואף ל-0. לכן השרש היחיד של הפונקציה הוא בנקודה (0,0).

נניח כי $x_0>1$. אז כדי למצוא את x_1 , יש להעביר ב x_0 ישר משיק ולמצוא את נקודת החתוך שלו עם ציר x, וזוהי x_1 . אבל שפוע המשיק הוא שלילי, ונקודת ההשקה שלו עם הגרף היא עם $y>0$, ולכן נקודת החתוך תהיה ימינה מ- x_0 , כלומר יתקים אי השויון $1<x_0<x_1$ באינדוקציה ברור כי הסדרה תעלה, למרות שהשרש היחיד הוא כאשר x=0.

הערה: דוגמא זו מופיעה (בלי פרוט) בהשלמה 5 לנומרית שבאתר.