<u>מבחן מועד א באנליזה נומרית</u>
<u>יום א, ז שבט התשס"ו 5-2-2006</u>

- מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.
- מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן 3 שאלות בנות 44 סעיפים ביחד. ישנם שני סעיפים בעלי משקל 8 נקודות: הסעיף האחרון של שאלה 2 והסעיף האחרון של שאלה 3. כל סעיף אחר שוה 2 נקודות וסה"כ 84 נקודות. יחד עם הסעיפים המיוחדים, הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .

בהצלחה.

**שאלה 1. (26 נקודות)**

שאלה זו עוסקת בשיטת ניוטון רפסון והיא בת שני חלקים.

**חלק ראשון- 16 נקודות**

הבט על $f(x)=\ln(x)$ ו $x_0=1.5$ . חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

$$g=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\ln(x)}{1/x}=x-x\ln(x)=x(1-\ln(x))$$

א. $x_1=0.8918023$

ב. $x_2=0.9939233$

ג. $x_3=0.999981499$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=0.5$ , $e_1=-0.1081977$ , $e_2=-0.0060767$ , $e_3=-0.000018501$

ה. חשב את $e_1/e_0=-0.2163954$ , $e_2/e_1=0.0121534$ , $e_3/e_2=0.000037002$

ו. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/e_n$ מתכנסת? תשובה: 0

ז. חשב את $e_1/(e_0)^2=-0.4327908$ , $e_2/(e_1)^2=-0.51907$ , $e_3/(e_2)^2=-0.50102$

ח. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/(e_n)^2$ מתכנסת?

תשובה:

$$\frac{g''(x)}{2}=\frac{f''(x)}{2f'(x)}=\frac{-1/x^2}{2\,1/x}=-\frac{1}{2x},\ p=1\rightarrow\frac{g''(p)}{2}=-0.5$$

**חלק שני-10 נקודות**

נתונה המשואה $x^3-6x^2+11x-7=0$ .

ט. מצא קטע שבו למשואה יש שרש p. תשובה:

הצב את הקצה השמאלי של הקטע של סעיף ט בתור $x_0$ , והשתמש בשיטת ניוטון רפסון לחשובים הבאים:

י. חשב את $x_1$: תשובה

יא. חשב את $x_2$: תשובה

יב. חשב את $x_3$: תשובה

יג. הערך את מרחק $x_3$ מהשורש p שעליו דברנו בסעיף ט. תשובה

תשובות לחלק שני. ט. קל לראות כי $f(3)=-1<0< f(4)=5$ ולכן יש שרש בקטע $[3,4]$ . נחשב את g של ניוטון רפסון:

$g=x-(f(x)/f'(x))=x-( x^3-6x^2+11x-7)/( 3x^2-12x+11)$. לכן : $g=(2x^3-6x^2+7)/( 3x^2-12x+11$. נציב $x_0=3$ ונקבל:

י. $x_1=3.5=7/2$

יא. $x_2=77/23=3.34782$

יב. $x_3=180033/54142=3.325299$

יג. נחשב את הנגזרות. $f'=3x^2-12x+11,f''=6x-12$ . $f''(3)=6,f''(4)=12$. לכן f'' חיובית בקטע, ולכן f' עולה בקטע, וכיון ש- $f'(3)=2, f'(4)=11$ נובע כי $Supf''=12,Inff'=2$ ולכן

$|x_3- x_0|\le12(x_3- x_2)^2/2\square2=12(0.02253)^2/4=0.0015228027$

**<u>שאלה 2(38 נקודות)</u>**
שאלה זו עוסקת בשיטת נקודות שבת כללית והיא בת שלשה סעיפים.
**<u>חלק ראשון-20 נקודות</u>**

הבט ב-$f(x)=x^3-10x^2-x+10=(x-1)(x+1)(x-10)$ .

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את $x^3$ בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של $g$ .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של $g$ . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של $x_0$ קרוב מספיק תתן סדרה המתכנסת לנקודת השבת? נקודות השבת הללו הן (אם אין כאלו נקודות שבת רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו $x_0$ קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודת השבת? נקודות השבת הללו הן (אם אין כאלו נקודות שבת רשום אין):

הצב $x_0=-4$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$ .

ה. $x_1=$

ו. $x_2=$

ז. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר $p$ הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e_3=$ , $e_2=$ , $e_1=$ , $e_0=$

ט. חשב את $e_3/e_2=$ , $e_2/e_1=$ , $e_1/e_0=$

י.  לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/e_n$ מתכנסת?  תשובה:

תשובות לחלק א'

א. תשובה:                 $g(x)=\sqrt[3]{(10x^2+x-10)}$

ב. הנקודות הן: -1,1,10

ג. הנקודות הללו הן : 10

ד. הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין): -1,1

ה.        $x1=\sqrt[3]{146}=5.264762$

ו.        $x2=6.398$

ז.        $x3=7.324$

ח.        $e0=-14$ , $e1=-4.74$ , $e2=-3.602$     $e3=-2.676$

ט.        $e1/e0=0.3385$ , $e2/e1=0.7599$ , $e3/e2=0.7429$

י.  תשובה:  $201/300=0.67$

**חלק שני-10 נקודות**

נתונה המשואה $x^3-9x^2+26x-25=0$ .

יא. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

יב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

יג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

יד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

טו. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

תשובות לחלק ב

יא. קל לראות כי $f(4)=-1<0<f(5)=5$ ולכן יש שרש בקטע [4,5] .
יב. נשאיר את 26x בצד אחד, נעביר את כל שאר המחוברים לצד שני ונקבל: $g(x)=[25+9x^2-x^3]/26$ .
יג. נחשב את הנגזרת $g'(x)=(18x-3x^2)/26=3x(6-x)/26$ . נשים לב כי $g'(4)=24/26, g'(5)=15/26$ כלומר בקטע זה $M=24/26=0.923$ . עוד נשים לב כי $g(4)=105/26=4.03, g(1)=125/26=4.8$ כלומר מתקימים תנאי המשפט.
יד. $|En|\le(12/13)^n(1-0)$ . טו.נשים לב כי $(12/13)^{58}<0.01<(12/13)^{57}$ לכן ה-n הראשון הוא n=58 .

**חלק שלישי- 8 נקודות**

טז.נניח כי L היא נקודת שבת של g(x) ונניח כי בחרנו על ידי נחוש $x_0$ כלשהו כך שמתקים $|g'(x_0)|>1$ . נביט בסדרה המוגדרת בצורה

איטרטיבית $x_{n+1}=g(x_n)$. מי מהאפשרויות הבאות נכונה? הקף את התשובה הנכונה.

טז-1- הסדרה תמיד מתכנסת ל-L.

טז-2- הסדרה לפעמים מתכנסת ל-L ולפעמים לא.

טז-3-הסדרה אף פעם לא מתכנסת ל-L.

תשובה לסעיף טז

נביט ב-$g(x)=x^2$ ובנקודת השבת $L=1$. נבחר $x_0=2$. אז $g'(2)=4$ ואז $x_n={}_2(2^n)$ ואינה מתכנסת.

נביט ב-$g(x)=x^{0.5}$ ובנקודת השבת $L=1$. נבחר $x_0=1/9$. אז $g'(1/9)=3/2$ ואז $x_n={}_9(0.5^n)$ ומתכנסת ל-L.

לכן התשובה הנכונה היא טז-2.

**<u>שאלה 3 (36 נקודות)</u>**

שאלה זו עוסקת באינטגרציה נומרית ובה שני חלקים:

**<u>חלק ראשון - 28 נקודות</u>**

חשב את סכום סימפסון המבוסס על m קטעים שוים (n חצאי קטעים) של $x^3$ על הקטע [-2,2] בצע את החשוב במחברתך. הסכום נתן לבטוי על ידי 10 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של m או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של m הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של m הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ו. תת הסכום הששי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ז. תת הסכום השביעי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ח. תת הסכום השמיני כפונקציה של m הוא

תשובה:

ט. תת הסכום התשיעי כפונקציה של m הוא
תשובה:

י. תת הסכום העשירי כפונקציה של m הוא

תשובה:

יא. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום סימפסון.

תשובה:

יב. מצא N כך שעבור m>N מתקיים כי השגיאה שבסעיף יא קטנה מ- 0.001 .

תשובה:
N=

יג. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום סימפסון, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של m .

תשובה:

יד. מצא N כך שעבור m>N מתקיים כי השגיאה שבסעיף יג קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

$$2) = \frac{4}{2m} = \frac{2}{m}, SSi = \frac{h}{3}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)) =$$

$$+ 2k\, {}^{2}\!/_{m})^3 + 4\sum_{k=0}^{m-1}(-2 + 2k\, {}^{2}\!/_{m} + {}^{2}\!/_{m})^3 + 8) =$$

$$2 + \frac{4k}{m})^3 + 4\sum_{k=0}^{m-1}(-2 + \frac{4k+2}{m})^3 + 8) =$$

$$+ 3\frac{2k}{m} - 3\frac{4k^2}{m^2} + \frac{8k^3}{m^3}) + \frac{64}{3m}\sum_{k=0}^{m-1}(-1 + 3\frac{2k+1}{m} - 3\frac{(2k+1)^2}{m^2} + \frac{(2k+1)^3}{m^3}) + \frac{16}{3m} =$$

ולכן:

$$+ 3\frac{2k}{m} - 3\frac{4k^2}{m^2} + \frac{8k^3}{m^3}) + \frac{64}{3m}\sum_{k=0}^{m-1}(-1 + 3\frac{2k+1}{m} - 3\frac{(2k+1)^2}{m^2} + \frac{(2k+1)^3}{m^3}) + \frac{16}{3m} =$$

$$\frac{4(m-1)m}{2m^2} - \frac{128(m-1)m(2m-1)}{6m^3} + \frac{256(m-1)^2 m^2}{3m^4\, 4} - \frac{64m}{3m} + \frac{64m2m}{m^2\, 2}$$

$$+ \frac{64m^2(2m^2-1)}{3m^4} + \frac{16}{3m} =$$

$$\frac{32(m-1)}{m} - \frac{64(m-1)(2m-1)}{3m^2} + \frac{64(m-1)^2}{3m^2} - \frac{64}{3} + 64 - \frac{64(2m-1)(2m+1)}{3m^2}$$

$$\frac{6}{m} - \frac{16}{3m} + 64 - \frac{64}{3} + \frac{32(m-1)}{m} - \frac{32(m-1)}{3m} + \frac{64(m-1)^2}{3m^2} - \frac{64(m-1)(2m-1)}{3m^2}$$

$$\frac{m-1)(2m+1)}{3m^2} = \frac{128}{3} + \frac{(96-32)(m-1)}{3m} + \frac{64(m-1)[(m-1)-(2m-1)]}{3m^2}$$

$$\frac{m-1)(2m+1)}{3m^2}$$

ולכן:

$$\frac{\ldots 2)(m-1)}{3m}+\frac{64(m-1)[(m-1)-(2m-1)]}{3m^2}+\frac{64(2m^2-1)}{3m^2}-\frac{64(2m-1)(2m+1)}{3m^2}=$$

$$-\frac{64(m-1)(-m)}{3m^2}+\frac{64[(2m^2-1)-(4m^2-1)]}{3m^2}=$$

$$-\frac{64(m-1)}{3m}+\frac{64(-2m^2)}{3m^2}=\frac{128}{3}-\frac{128}{3}=0.$$

תשובות:

א. $-\frac{16}{3m}$, ב. $-\frac{32(m-1)}{3m}$, ג. $\frac{32(m-1)}{m}$, ד. $\frac{-64(m-1)(2m-1)}{3m^2}$, ה.

$\frac{64(m-1)^2}{3m^2}$, ו. $-\frac{64}{3}$, ז. $64$. ח. $\frac{-64(2m-1)(2m+1)}{3m^2}$ .ט $\frac{64(2m^2-1)}{3m^2}$ .י $\frac{16}{3m}$.

יא. 0. יב. 0 . יג. $E=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}=0$ . יד. 0.

**<u>חלק שני- 8 נקודות</u>**

טו. תן דוגמא (לא ציור) לפונקציה f , קטע [a,b] ומספר טבעי n כך שסכום רימן (עם נקודות בינים בשמאל) קרוב יותר לאינטגרל האמיתי מאשר סכום הטרפזים.

דוגמא: נביט ב- $f=3x^2-24x+21$ על הקטע [1,9] ועל $n=1$. הקדומה היא $F(x)=x^3-12x^2+21x$, ומתקיים כי $F(1)=F(9)=0$ ולכן האינטגרל הוא 0. בנוסף $f(1)=0,\ f(9)=48$ ולכן סכום רימן שוה ל- $6\cdot0=0$ ושוה ממש לאינטגרל ולעומתו סכום הטרפז הוא $6(0+48)/2=144$ ובאמת סכום רימן יותר קרוב לאינטגרל.

## **דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:**

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i$-$x_{i-1}$=h=(b-a)/n:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)),\ h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ . אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$ , או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$,
$M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$| x_{n+1} - L | \le \frac{M}{2m} (x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר M=supf'', m=inf f' בקטע [a,b] שבו f(a)f(b)<0 .

------------------------סוף טור א

<u>מבחן מועד א באנליזה נומרית</u>
<u>יום א, ז שבט התשס"ו 5-2-2006</u>

- מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.
- מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן 3 שאלות בנות 44 סעיפים ביחד. ישנם שני סעיפים בעלי משקל 8 נקודות: הסעיף האחרון של שאלה 2 והסעיף האחרון של שאלה 3. כל סעיף אחר שוה 2 נקודות וסה"כ 84 נקודות. יחד עם הסעיפים המיוחדים, הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .

בהצלחה.

**<u>שאלה 1. (26 נקודות)</u>**

שאלה זו עוסקת בשיטת ניוטון רפסון והיא בת שני חלקים.

**<u>חלק ראשון- 16 נקודות</u>**

הבט על $f(x)=\ln(x)$ ו $x_0=1.4$ . חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

$$g = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\ln(x)}{1/x} = x - x\ln(x) = x(1-\ln(x))$$

א. $x_1=0.9289388$

ב. $x_2= 0.9974131$

ג. $x_3= 0.9999966511$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0= 0.4$ , $e_1=-0.0710611$ , $e_2=-0.00258686$ , $e_3=-0000033488$

ה. חשב את $e_1/e_0=-0.17765275$ , $e_2/e_1=0.0364033$ , $e_3/e_2=0.0012945$

ו. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/e_n$ מתכנסת? תשובה: 0

ז. חשב את $e_1/(e_0)^2=-0.444131875$ , $e_2/(e_1)^2=-0.512281$ , $e_3/(e_2)^2=-0.500430026$

ח. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/(e_n)^2$ מתכנסת?
תשובה:

$$\frac{g''(x)}{2} = \frac{f''(x)}{2f'(x)} = \frac{-1/x^2}{2\,1/x} = -\frac{1}{2x}, p=1 \rightarrow \frac{g''(p)}{2} = -0.5$$

**<u>חלק שני-10 נקודות</u>**

נתונה המשואה $x^3-9x^2+26x-25=0$ .

ט. מצא קטע שבו למשואה יש שרש p. תשובה:

הצב את הקצה השמאלי של הקטע של סעיף ט בתור $x_0$ , והשתמש בשיטת ניוטון רפסון לחשובים הבאים:

י. חשב את $x_1$: תשובה

יא. חשב את $x_2$: תשובה

יב. חשב את $x_3$: תשובה

יג. הערך את מרחק $x_3$ מהשורש p שעליו דברנו בסעיף ט. תשובה

תשובות לחלק השני. ט. קל לראות כי $f(4)=-1<0<f(5)=5$ ולכן יש שרש בקטע $[4,5]$ . נחשב את g של ניוטון רפסון:

$g=x-(f(x)/f'(x))=x-(x^3-9x^2+26x-25)/(3x^2-18x+26)$. לכן :
$g=(2x^3-9x^2+25)/(3x^2-18x+26)$. נציב $x_0=4$ ונקבל:

י. $x_1=4.5=9/2$

יא. $x_2=100/23=4.34782$

יב. $x_3=180033/54142=4.32520039$

יג. נחשב את הנגזרות. $f'=3x^2-18x+26, f''=6x-18$ .
$f''(4)=6, f''(5)=12$. לכן $f''$ חיובית בקטע, ולכן $f'$ עולה
בקטע, וכיון ש- $f'(4)=2,\ f'(5)=11$ נובע כי $\mathrm{Sup}f''=12, \mathrm{Inf}f'=2$
ולכן
$|x_3-x_0|\le 12(x_3-x_2)^2/2\square 2=12(0.02262)^2/4=0.0015349932$

**שאלה 2(38 נקודות)**
שאלה זו עוסקת בשיטת נקודות שבת כללית והיא בת שלשה סעיפים.
**חלק ראשון-20 נקודות**

הבט ב-$f(x)=x^3-10x^2-x+10=(x-1)(x+1)(x-10)$ .

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את $x^3$ בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של $g$ .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של $g$ . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של $x_0$ קרוב מספיק תתן סדרה המתכנסת לנקודת השבת? נקודות השבת הללו הן (אם אין כאלו נקודות שבת רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו $x_0$ קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודת השבת? נקודות השבת הללו הן (אם אין כאלו נקודות שבת רשום אין):

הצב $x_0=11$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$ .

ה. $x_1=$

ו. $x_2=$

ז. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר $p$ הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e_3=$ , $e_2=$ , $e_1=$ , $e_0=$

ט. חשב את $e_3/e_2=$ , $e_2/e_1=$ , $e_1/e_0=$

י. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/e_n$ מתכנסת? תשובה:

תשובות:

א. תשובה: $g(x)=\sqrt[3]{(10x^2+x-10)}$

ב. הנקודות הן: 1,1,10-

ג. הנקודות הללו הן : 10

ד. הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין): 1,1-

ה. $x1=\sqrt[3]{1211}=10.6589$

ו. $x2=\sqrt[3]{1136}=10.4341$

ז. $x3=\sqrt[3]{1088}=10.2857$

ח. $e0=1$ , $e1=0.6589$ , $e2=0.4341$ $e3=0.2857$

ט. $e1/e0=0.6589$ , $e2/e1=0.6588$ , $e3/e2=0.6581$

י. תשובה: $201/300=0.67$

**חלק שני-10 נקודות**

נתונה המשואה $x^3-6x^2+11x-7=0$ .

יא. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

יב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

יג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

יד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

טו. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

תשובות לחלק ב.. יא. קל לראות כי $f(3)=-1<0, f(4)=5>0$ ולכן יש שרש בקטע $[3,4]$ .

יב. נשאיר את $11x$ בצד אחד, נעביר את כל שאר המחוברים לצד שני ונקבל: $g(x)=[7+6x^2-x^3]/11$ .

יג. נחשב את הנגזרת $g'(x)=(12x-3x^2)/11=3x(4-x)/11$ . נשים לב כי $g'(3)=9/11, g'(4)=0$ כלומר בקטע זה $M=9/11=0.818$ . עוד נשים לב כי $g(3)=38/11=3.45, g(4)=41/11=3.72$ כלומר מתקימים תנאי המשפט.

יד. $|En|\le(0.828)^n(1-0)$ . טו. לפי מחשבון $(9/11)^{22}>0.01>(9/11)^{23}$ ולכן $n=23$ .

**חלק שלישי- 8 נקודות**

טז.נניח כי L היא נקודת שבת של $g(x)$ ונניח כי בחרנו על ידי נחוש $x_0$ כלשהו כך שמתקים $|g'(x_0)|>1$ . נביט בסדרה המוגדרת בצורה איטרטיבית $x_{n+1}=g(x_n)$. מי מהאפשרויות הבאות נכונה? הקף את התשובה הנכונה.

טז-1- הסדרה תמיד מתכנסת ל-L.

טז-2- הסדרה לפעמים מתכנסת ל-L ולפעמים לא.

טז-3-הסדרה אף פעם לא מתכנסת ל-L.

התשובה כמו בטור הקודם.

**<u>שאלה 3 (36 נקודות)</u>**
שאלה זו עוסקת באינטגרציה נומרית ובה שני חלקים:

**<u>חלק ראשון - 28 נקודות</u>**
חשב את סכום סימפסון המבוסס על m קטעים שוים (n חצאי קטעים) של $x^3$ על הקטע [-2,2] בצע את החשוב במחברתך. הסכום נתן לבטוי על ידי 10 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של m או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של m הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של m הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ו. תת הסכום הששי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ז. תת הסכום השביעי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ח. תת הסכום השמיני כפונקציה של m הוא

תשובה:

ט. תת הסכום התשיעי כפונקציה של m הוא
תשובה:

י. תת הסכום העשירי כפונקציה של m הוא

תשובה:

יא. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום סימפסון.

תשובה:

יב. מצא N כך שעבור $m>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף יא קטנה מ- 0.001 .

תשובה:
N=

יג. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום סימפסון, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של m .

תשובה:

יד. מצא N כך שעבור $m>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף יג קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

**<u>חלק שני-8 נקודות</u>**

טו. תן דוגמא (לא ציור) לפונקציה f , קטע [a,b] ומספר טבעי n כך שסכום רימן (עם נקודות בינים בשמאל) קרוב יותר לאינטגרל האמיתי מאשר סכום הטרפזים.

שאלה זו זהה בשני הטורים ויש לה אותה תשובה.

## **דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:**

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0) - (x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i$-$x_{i-1}$=h=(b-a)/n:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים  (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$.  בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ .  אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$ , או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש -$f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש.  אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת  (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$,
$M=\sup g'(x)$, $a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1}-L| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2$$

כאשר $m=\inf f'$, $M=\sup f''$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ .