NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. מבוא לאנליזה נומרית מועד א התשס"ז. יום ב, א אדר התשסז 19-2-2007

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן במחברות.

במבחן 5 שאלות.

3 השאלות הראשונות הן חשוביות ומשקל כל סעיף בהן הוא 4 נקודות.

שאלה 4 היא שאלת הוכחה ומשקלה 17 נקודות.

שאלה 5 היא מיוחדת ומשקלה 15 נקודות. סה"כ $17\cdot4+17+15=100$.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

<u>שאלה 1. (36 נקודות)</u> (כל סעיף בעל משקל של 4 נקודות)

הבט באינטגרל $\int_a^b (x^3+x)dx$

א. חשב את האינטגרל.

ב. חשב את סכום רימן עבור האינטגרל המבוסס על n קטעים שוים.

ג. חשב את הגבול של סכום רימן מסעיף ב כאשר n שואף ל-∞.

ד. חשב את ההפרש האמיתי בין הגבול ובין הסדרה.

ה. הצב a>0, b=2a בחשוב של הסעיף הקודם.

ו. מצא תנאי על n שיבטיח כי ההפרש של הסעיף הקודם קטן מ-ε

ז. לסעיף זה משקל של 12 נקודות:

הבט באינטגרל $\int_2^4 e^{-x^3}dx$

מצא M כך שעבור n>M מתקיים כי סכום הטרפזים עבור האינטגרל קרוב לאינטגרל בקרוב של 0.01 .

<u>שאלה 2. (20 נקודות)</u> בשאלה זו בצע חשובים עד דיוק של 4 ספרות לאחר הנקודה העשרונית.
הבט במשואה $x^2-100=0$**.**

א. הצב $x_0=5$ **ומצא את** x_1,x_2,x_3,x_4 **בשיטת ניוטון רפסון.**

ב. חשב את e_0,e_1,e_2,e_3,e_4 **עבור** $e_i=x_i-s$ **כאשר s הוא שרש של המשואה המקורית.**

ג. חשב את המנות e_{i+1}/e_i עבור $0\square i\square 3$.

ד. חשב את המנות $e_{i+1}/(e_i)^2$ עבור $0\square i\square 3$.

ה. מהו $\lim\ e_{i+1}/(e_i)^2$?

<u>שאלה 3. (12 נקודות)</u>

הבט במשואה $x^4-10\ x^3+25\ x^2+250x+7=0$.

א. מצא תחום $[a,b]$ שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח כי סדרת ניוטון רפסון מתכנסת לגבול יחיד.

ב. חשב שלשה איברים בסדרה המתכנסת לשרש.

ג. הערך את $|x_3-s|$ כאשר s הוא השרש המבוקש.

<u>שאלה 4. (17 נקודות)</u>

נסח והוכח את משפט שארית לגרנז עבור פולינום האינטרפולציה.

<u>שאלה5. (15 נקודות)</u>

א. כתוב את נוסחת פרבולת טיילור: (פולינום טיילור ממעלה 2).

ב. מצא מתי הפולינום שבסעיף הקודם מתאפס.

ג. הכלל את שיטת ניוטון רפסון ומצא שיטה כללית של התכנסות לשרש אשר במקרה והפולינום בסעיף א יהפך להיות ישר, אז השיטה החדשה תהפוך לשיטת ניוטון רפסון.

ד. הצב בנוסחה של הסעיף הקודם את הבעיה $x^2=4$ ו-$x_0=1$ ומצא את 3 האיברים הראשונים של הסדרה האמורה להתכנס לשרש.

ה. מצא תנאי לכך שהשיטה תעבד.

תשובות

א.1

$$\int_a^b (x^3+x)dx = \left.\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^4-a^4}{4}+\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{4}[a^2+b^2+2].$$

ב

$$SR(n) = h\sum_{k=0}^{n-1}[(a+kh)^3+(a+kh)] = h\sum_{k=0}^{n-1}[a^3+3a^2kh+3ak^2h^2+k^3h^3+a+kh] =$$

$$= ha^3\sum_{k=0}^{n-1}1+3h^2a^2\sum_{k=0}^{n-1}k+3h^3a\sum_{k=0}^{n-1}k^2+h^4\sum_{k=0}^{n-1}k^3+ha\sum_{k=0}^{n-1}1+h^2\sum_{k=0}^{n-1}k =$$

$$= h(a^3+a)\sum_{k=0}^{n-1}1+h^2(3a^2+1)\sum_{k=0}^{n-1}k+3h^3a\sum_{k=0}^{n-1}k^2+h^4\sum_{k=0}^{n-1}k^3 =$$

$$= \frac{b-a}{n}(a^3+a)n+\frac{(b-a)^2}{n^2}(3a^2+1)\frac{n(n-1)}{2}+3\frac{(b-a)^3}{n^3}a\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+$$

$$+\frac{(b-a)^4}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = (b-a)[a^3+a+\frac{n-1}{2n}(3a^2+1)(b-a)+$$

$$+(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{4n^2}] =$$

$$= \frac{(b-a)}{4}[4a^3+4a+\frac{n-1}{n}(6a^2+2)(b-a)+$$

$$+4(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{n^2}]$$

ג.

$$\lim_{n\to\infty} SR(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)}{4}[4a^3+4a+\frac{n-1}{n}(6a^2+2)(b-a)+$$

$$+4(b-a)^2 a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{n^2}]=$$

$$=\frac{(b-a)}{4}[4a^3+4a+(6a^2+2)(b-a)+4(b-a)^2a+(b-a)^3]=$$

$$=\frac{(b-a)}{4}[4a^3+4a+6a^2b-6a^3+2b-2a+4b^2a-8ba^2+4a^3+b^3-3ab^2+3a^2b-a^3]=$$

$$=\frac{(b-a)}{4}[a^3+a^2b+ab^2+b^3+2a+2b]=\frac{(b-a)}{4}[(a+b)(a^2+b^2+2)]=\frac{(b^2-a^2)}{4}(a^2+b^2+2).$$

ד.

$$e(n)=\frac{(b-a)}{4}[4a^3+4a+(6a^2+2)(b-a)+4(b-a)^2a+(b-a)^3]-$$

$$\frac{(b-a)}{4}[4a^3+4a+\frac{n-1}{n}(6a^2+2)(b-a)+4(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{n^2}]=$$

$$=\frac{(b-a)}{4}[\frac{1}{n}(6a^2+2)(b-a)+\frac{3n-1}{2n^2}4(b-a)^2a+\frac{2n-1}{n^2}(b-a)^3]=$$

.],=

$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[(6a^2+2)+\frac{6n-2}{n}(b-a)a+\frac{2n-1}{n}(b-a)^2]=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[a^2(6-\frac{6n-2}{n}+\frac{2n-1}{n})+ab(\frac{6n-2}{n}-\frac{4n-2}{n})+b^2\frac{2n-1}{n}+2]=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[a^2\frac{2n+1}{n}+2ab+b^2\frac{2n-1}{n}+2]=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[2(a^2+ab+b^2+1)+\frac{1}{n}(a^2-b^2)].$$

ה.

$$e(n)=\frac{(2a-a)^2}{4n}[2(a^2+a2a+(2a)^2+1)+\frac{1}{n}(a^2-(2a)^2)]=$$

$$=\frac{a^2}{4n}[2(a^2+2a^2+4a^2+1)+(\frac{a^2}{n}-\frac{4a^2}{n})]=\frac{a^2}{4n}[14a^2+2-3a^2\frac{1}{n}]\le\frac{a^2}{4n}2(7a^2+1)=\frac{a^2(7a^2+1)}{2n}$$

ו.

$$e(n)<\frac{a^2(7a^2+1)}{2n}<\varepsilon\to\frac{a^2(7a^2+1)}{2\varepsilon}<n$$

ז.

$$er=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2},\ f=e^{-x^3},\ f'=-3x^2e^{-x^3},\ f''=(-6x+9x^4)e^{-x^3},$$

$$|f''|\le|-6x+9x^4|e^{-x^3}\le 9\cdot4^4e^{-2^3}=\frac{2304}{e^8}=,$$

$$er\le\frac{2304(4-2)^3}{12n^2e^8}=\frac{1536}{n^2e^8}=\frac{0.515270596}{n^2}\le\frac{1}{100}\to 51.527\le n^2\to 8\le n$$

2. א

$$f=x^2-100,g=x-\frac{f}{f'}=x-\frac{x^2-100}{2x}=\frac{x^2+100}{2x}$$

$$x_0=5,x_1=g(x_0)=\frac{125}{10}=\frac{25}{2}=12.5,$$

$$x_2=\frac{625/4+100}{25}=\frac{1025}{100}=\frac{41}{4}=10.25,$$

$$x_3=\frac{1681/16+100}{41/2}=\frac{3281}{328}=10.00304,$$

$$x_4=\frac{(3281/328)^2+100}{2\cdot3281/328}=\frac{216523361}{21652336}=10.0000004646$$

ב.

$$e_i=x_i-10,e_0=x_0-10=5-10=-5,e_1=x_1-10=\frac{25}{2}-10=\frac{5}{2},$$

$$e_2=\frac{41}{4}-10=\frac{1}{4},e_3=\frac{3281}{328}-=10=\frac{1}{328},$$

$$e_4=\frac{216523361}{21652336}-10=\frac{1}{21652336}$$

ג.

$$\frac{e_1}{e_0}=\frac{5/2}{-5}=\frac{-1}{2},\frac{e_2}{e_1}=\frac{1/4}{5/2}=\frac{1}{10},\frac{e_3}{e_2}=\frac{1/328}{1/4}=\frac{1}{82}$$

$$\frac{e_4}{e_3}=\frac{1/2152336}{1/328}=\frac{1}{6562}$$

ד.

$$\frac{e_1}{(e_0)^2}=\frac{5/2}{(-5)^2}=\frac{1}{10},\frac{e_2}{(e_1)^2}=\frac{1/4}{(5/2)^2}=\frac{1}{25},\frac{e_3}{(e_2)^2}=\frac{1/328}{(1/4)^2}=\frac{2}{41}$$

$$\frac{e_4}{(e_3)^2}=\frac{1/2152336}{(1/328)^2}=\frac{164}{3281}$$

ה.

$$\lim\frac{e_{i+1}}{(e_i)^2}=\lim\frac{g''(c_i)}{2}=\frac{g''(\alpha)}{2}=\frac{(x-f/f')''}{2}=\frac{1}{2}(1-\frac{ff''-f'^2}{f'^2})'=\frac{1}{2}(\frac{ff''}{f'^2})'=\frac{1}{2}(\frac{(ff'''+f'f'')f'^2-2f'f''ff''}{f'^4})/$$

נזכר כי f(α)=0, נציב זאת ונקבל

$$\lim\frac{e_{i+1}}{(e_i)^2}=\frac{1}{2}(\frac{(ff'''+f'f'')f'^2-2f'f''ff''}{f'^4})=\lim\frac{1}{2}(\frac{(0+f'f'')f'^2-2\cdot 0}{f'^4})=\frac{1}{2}\frac{f'^3f''}{f'^4}=\frac{f''}{2f'}$$

נזכר כי $f=x^2-100$, נציב ונקבל.

$$\lim\frac{e_{i+1}}{(e_i)^2}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}=\frac{2}{2\cdot 2\alpha}=\frac{1}{2\alpha}=\frac{1}{20}$$

3. א.

$f(x)= x^4-10\ x^3+25\ x^2+250x+7$

$f'(x)=4x^3-30\ x^2+50\ x+250$

$f''(x)=12x^2-60\ x+50$

צריך קטע שבו f'' חיובית. נמצא את שרשי f''.

$$12x^2-60x+50=2(6x^2-30x+25).\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2-4\cdot6\cdot25}}{2\cdot6}=\frac{30\pm\sqrt{900-600}}{12}=$$
$$=\frac{30\pm\sqrt{300}}{12}=\frac{30\pm10\sqrt{3}}{12}\approx\frac{30\pm17.32}{12}=\frac{47.32}{12},\frac{12.68}{12}=3.94,1.05$$

לכן נחפש קטע דרוש מחוץ לקטע שרשי f''.

$$f(x)=x^4-10x^3+25x^2+250x+7,\ f(-1)=1+10-25-250+7<0,\ f(0)=7.$$

לכן בקטע [a=-1,b=0] מתקיים כי $f(a)<0<f(b)$ וכי $f''>0$. נביט על $f'(x)=4x^3-30\ x^2+50\ x+250$, ומתקים:

$$f'(x)=4x^3-30x^2+50x+250,\ f'(-1)=-4-30-50+250>0$$

כיון שבקטע [-1,0] הנגזרת השניה חיובית, אז f' עולה בקטע, ולכן $f'(0)>0$.
לכן בקטע זה מתקימות כל ההנחות.

ב. נחשב את g.

$$g = x - \frac{f}{f'} = x - \frac{x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 250x + 7}{4x^3 - 30x^2 + 50x + 250} = \frac{4x^4 - 30x^3 + 50x^2 + 250x - (x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 250x + 7)}{4x^3 - 30x^2 + 50x + 250} =$$
$$= \frac{3x^4 - 20x^3 + 25x^2 - 7}{4x^3 - 30x^2 + 50x + 250} = \frac{((3x-20)x+25)x^2 - 7}{((4x-30)x+50)x+250}.$$

כעת נציב $x_0=0$ ונקבל:

$$g = \frac{((3x-20)x+25)x^2 - 7}{((4x-30)x+50)x+250}.x_0 = 0, x_1 = \frac{-7}{250} = -0.028,$$
$$x_1 = \frac{((3\cdot(-0.028)-20)(-0.028)+25)(-0.028)^2 - 7}{((4\cdot(-0.028)-30)(-0.028)+50)(-0.028)+250} = \frac{-6.979959116}{248.576392192} = -0.028|07973458$$
$$, x_2 = \frac{-0.6.979843546178}{248.572270565814} = -0.02807973|582427$$

ג.

$$|x_2 - L| \le \frac{M}{2m}(x_2 - x_1)^2 \le \frac{M}{2m}(0.0000000013)^2$$

מזכר כי f'' היא פרבולה שערכה המוחלט גדל ככל שמתרחקים משרשיה.
לכן f'' חסום על ידי

$$M = f''(-1) = 12(-1)^2 - 60\cdot(-1) + 50 = 12 + 60 + 50 = 122$$

לעומת זאת, f' עולה ולכן חסם מלרע שלה הוא

$$m = f'(-1) = 4(-1)^3 - 30(-1)^2 + 50\cdot(-1) + 250 = -4 - 30 - 50 + 250 = 166$$

ולכן:

$$|x_2 - L| \le \frac{M}{2m}(0.0000000013)^2$$

$$\le \frac{122}{2\cdot 166}(0.0000000013)^2 \le 6.21\cdot 10^{-19}$$

5. א. נביט במשואת הפרבולה המשיקה.

$$f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2}=0 \to 2f(a)+2f'(a)h+f''(a)h^2=0$$

$$\to h=\frac{-2f'(a)\pm\sqrt{(2f'(a))^2-4f''(a)2f(a)}}{2f''(a)}=\frac{-f'(a)\pm\sqrt{f'(a)^2-2f''(a)f(a)}}{f''(a)}$$

נציב $f(x)=x^2-4, f'(x)=2x, f''(x)=2$ ונקבל:

$$h=\frac{-f'(a)\pm\sqrt{f'(a)^2-2f''(a)f(a)}}{f''(a)}==\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-2\cdot 2(a^2-4)}}{2}=$$

$$=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-2\cdot 2(a^2-4)}}{2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4a^2+16}}{2}=$$

$$=\frac{-2a\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2a\pm 4}{2}=-a\pm 2$$

ולכן:

$$h=-a+2 \to x_{n+1}=x_n+h=x_n-x_n+2=2$$

כלומר $x_{n+1}=2$ ללא תלות בערך של x_n.

ה. השיטה עובדת אם מה שבתוך השרש אי שלילי, כלומר בתנאי ש-

$$0\le f'(a)^2-2f''(a)f(a)$$

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b) - f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdots\cdots(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש -$f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$| x_{n+1} - L | \le \frac{M}{2m} (x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $M=\sup f''$, $m=\inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$.