המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתו, מועד ב.</u>

יום ד, כ אדר התשע"ב 14-3-2012

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 6 שאלות.
- משקל כל אחת משאלות 1-4 הוא 20 נקודות .
- שאלה 5 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 6 היא שאלות הבנה ומשקלה 10 נקודות.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה ראשונה (20 נקודות).

א. מצא את n כך ש $P_n(x)$, פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב a=1 יקיים ש $|f(x)-P_n(x)|<0.1$ עבור כל x בקטע [1,2].

ב. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(x)$.

ג. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(1.4641)$.

ד. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, מצא את c. כך שיתקיים השויון $f(1.4641)-P_n(1.4641)=R_n(c)$.

שאלה שניה (20 נקודות).

א. עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ מצא את ישר האינטרפולציה $P_1(x)$, בנקודות $a_0=1, a_1=81$

ב. מצא את c. כך שיתקיים השויון $f(16)-P_1(16)=R_1(c)$.

ג. מהו n כך שעבור $a_0=16,....,a_n=32$ פולינום האינטרפולציה $P_n(x)$ של $f(x)=\sqrt[4]{x}$ יקיים לכל x בקטע [16,32] ש- $|f(x)-P_n(x)|<0.01$.

ד. עבור $f(x)=\sqrt{2x}$ חשב את ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=2 את ישר טיילור $T_1(x)$ סביב b=32 , ואת פולינום האינטרפולציה $Q_1(x)$ דרך a=2,b=32.

ה. מצא קטע שבו ישר האינטרפולציה $Q_1(x)$,מסעיף ד מקרב טוב יותר את f של סעיף ד מאשר ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=2 וטוב יותר מאשר ישר טיילור $T_1(x)$ סביב b=32.

שאלה שלישית (20 נקודות).

א. חסום על ידי קבועים את הנגזרות מסדר 1 ו-2 של הפונקציה

. $[\pi,2\pi]$ בקטע, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

ב. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה

שבחשוב $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$, על ידי שיטת סכומי רימן עם n קטעים שוים

ונקודת בינים בשמאל.

ג. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה

שבחשוב $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$, על ידי שיטת הטרפז עם n קטעים שוים.

ד. מצא M שהחל ממנו החסם שבסעיף ג יהיה פחות מאלפית כפול החסם שבסעיף ב.

שאלה רביעית (20 נקודות)

א. העבר את המשואה $f(x)=x^3+2x^2-5x-6=0$ לצורת נקודת השבת על ידי העברת x^3 לצד שני והוצאת שורש שלישי .

ב. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה ואיזו מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ג. העבר את המשואה $f(x)=x^3+2x^2-5x-6=0$ לצורת נקודת השבת על ידי העברת $2x^2$ לצד שני והוצאת שורש רבועי .

ד. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה ואיזו מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ה. מצא עבור המשואה $f(x)=x^3+2x^2-5x-5$ קטע בו מתקיים המשפט עבור התכנסות שיטת ניוטון רפסון.

ו. באותו קטע חשב שורש של הפולינום ברמת דיוק של 0.01

שאלה חמישית (10 נקודות)

הוכח את נוסחת השגיאה עבור שיטת הטרפז, עבור n=1 ועבור n כללי

שאלה שישית (10 נקודות)

תן דוגמא לפונקציה רציפה וגזירה בעלת שורש יחיד, המקיימת שאם בוחרים x_0 כלשהו מצד אחד של השורש אז שיטת ניוטון רפסון מתכנסת, ואם בוחרים מצד שני אז היא מתכנסת רק אם x_0 נמצא בקטע סופי.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i} (x - a_j)}{\prod_{j \ne i} (a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז :

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי) :

$$\frac{h}{3}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון :

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה :

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0

סימנו, ואם לא אז $[a_n,c_n]=[a_{n+1},b_{n+1}]$, או, $[c_n,b_n]=[a_{n+1},b_{n+1}]$. הדבר נקבע כך ש $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n|\le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p)=\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1}-L|\le\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2$$

כאשר M=supf'', m=inf f' בקטע [a,b] שבו f(a)f(b)<0 וגם f',f''>0.

תשובות

תשובה ראשונה

א.

$$f(x)=\sqrt[4]{x},\ f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}},\ f''(x)=\frac{(-3)}{4^2\sqrt[4]{x^7}},\ f'''(x)=\frac{(-3)(-7)}{4^3\sqrt[4]{x^{11}}},\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-3)(-7)\cdots(5-4n)}{4^n\sqrt[4]{x^{4n-1}}},\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(-3)(-7)\cdots(5-4n)(1-4n)}{4^{n+1}\sqrt[4]{x^{4n+3}}}$$

ולכן:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-3)(-7)\cdots(5-4n)(1-4n)h^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt[4]{c^{4n+3}}(n+1)!},|R_n(x)|=\frac{3}{4}\frac{7}{4\cdot 2}\cdots\frac{4n-1}{4\cdot n}\frac{1}{4\cdot(n+1)}\frac{h^{n+1}}{\sqrt[4]{c^{4n+3}}},$$

$$|R_n(x)|\le\frac{3}{4}\cdot 1\cdots 1\frac{1}{4\cdot(n+1)}\frac{h^{n+1}}{\sqrt[4]{1^{4n+3}}}\le\frac{3\cdot(1)^{n+1}}{16(n+1)\sqrt[4]{1^{4n+3}}}\le\frac{3}{16(n+1)}<0.1\to\frac{30}{16}<n+1\to 0<n\to 1\le n$$

ב.

$$f(1)=1,\ f'(1)=\frac{1}{4},P_1(h)=1+\frac{h}{4}=1+\frac{x-1}{4}=\frac{x+3}{4}$$

ג.

$$P_1(x)=\frac{x+3}{4}, P_1(1.4641)=\frac{4.4641}{4}=1.116025$$

$$f(x)=\sqrt[4]{x}, f(1.4641)=1.1$$

ד

$$f(x)=\sqrt[4]{x}, f(1.4641)-P_1(1.4641)=1.1-1.116025=-0.016025=e$$

$$e=-0.016025\rightarrow\frac{-3}{4^2\sqrt[4]{c^7}}(0.4641)^2\frac{1}{2}=-0.016025\rightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{c^7}}=\frac{0.5128}{0.64616643}\rightarrow\sqrt[4]{c^7}=1.260074944, c\sim 1.14116170$$

תשובה 2

א.

$$f(x)=\sqrt[4]{x}, f(1)=1, f(81)=3, P_1=\frac{(x-1)(3-1)}{(81-1)}+1=\frac{(x-1)}{40}+1=\frac{x+39}{40}$$

ב.

$$f(16)-P_1(16)=\sqrt[4]{16}-\frac{16+39}{40}=2-\frac{55}{40}=\frac{25}{40}=R_1(c)=\frac{f''(c)(16-1)(16-81)}{2}\rightarrow$$

$$f''(c)=\frac{50}{40\cdot 15\cdot(-65)}\rightarrow\frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}c^{-7/4}=\frac{-1}{20\cdot 13\cdot 3}\rightarrow c^{-7/4}=\frac{4}{5\cdot 13\cdot 9}\rightarrow c^{7/4}=\frac{585}{4}=146.25\rightarrow$$

$$c=(146.25)^{4/7}\sim 17.2662....$$

$$f(x)-P_n(x)=R_n(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-16)(x-a_1)..(x-a_{n-1})(x-32)}{(n+1)!}\rightarrow$$

ג.

$$|R_n(c)|\le\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\cdot(4n-1)(32-16)^{n+1}}{c^{(4n+3)/4}4^{n+1}(n+1)!}\le\frac{3}{4}\frac{7}{8}...\frac{4n-1}{4n}\frac{(16)^{n+1}}{4(n+1)c^{(4n+3)/4}}\le\frac{(16)^{n+1}}{4(n+1)16^{(4n+3)/4}}$$

$$|R_n(c)|\le\frac{16(16)^{n+1}}{4(n+1)16^{(4n+4)/4}}=\frac{16(16)^{n+1}}{(n+1)16^{n+1}}=\frac{16}{(n+1)}<\frac{1}{100}\rightarrow 1600<n+1\rightarrow 1599<n.$$

כלומר צריך פולינום אינטרפולציה ע״ס 1600 נקודות, $a_0=16, a_{1600}=32$

ובנוסף עוד 1598 נקודות בינים.

ד.

$$f(x)=\sqrt{2x},\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}},S_1=2+\frac{x-2}{2}=\frac{x+2}{2},T_1=8+\frac{x-32}{8}=\frac{x+32}{8},$$
$$Q_1(x)=2+\frac{(x-2)(8-2)}{32-2}=2+\frac{(x-2)}{5}=\frac{x+8}{5}$$

ה. כיון שf קעורה, הרי שישרי טיילור הם מעל הגרף, ופולינום האינטרפולציה מתחתיו, ולכן :

$$e_1=\frac{x+2}{2}-\sqrt{2x},e_2=\frac{x+32}{8}-\sqrt{2x},e_3=\sqrt{2x}-\frac{x+8}{5}\rightarrow$$
$$[\sqrt{2x}-\frac{x+8}{5}<\frac{x+2}{2}-\sqrt{2x}]\wedge[\sqrt{2x}-\frac{x+8}{5}<\frac{x+32}{8}-\sqrt{2x}]\rightarrow$$
$$[2\sqrt{2x}<\frac{x+8}{5}+\frac{x+2}{2}]\wedge[2\sqrt{2x}<\frac{x+32}{8}+\frac{x+8}{5}]\rightarrow$$
$$[20\sqrt{2x}<2(x+8)+5(x+2)]\wedge[80\sqrt{2x}<5(x+32)+8(x+8)]\rightarrow$$
$$[20\sqrt{2x}<7x+26]\wedge[80\sqrt{2x}<13x+224]\rightarrow$$
$$[800x<49x^2+364x+676]\wedge[12800x<169x^2+5824x+50176]\rightarrow$$
$$[0<49x^2-436x+676]\wedge[0<169x^2-6976x+50176].$$

שרשי המשואה הראשונה הם 2 וגם 338/49, ושרשי המשואה השניה הם 32 וגם 1568/169. לכן הקטע הרצוי הוא [334/49,1568/169]≈[6.816,9.278]

תשובה 3

א.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\ f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\ f''(x)=\frac{(-x\sin x-\cos x+\cos x)x^2-2x(x\cos x-\sin x)}{x^4}=$$
$$=\frac{-x^3\sin x-2x^2\cos x+2x\sin x}{x^4}=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$$

ולכן, בקטע [π,2π],

$$|f(x)|\le \frac{1}{\pi}, |f'(x)|\le \frac{2\pi+1}{\pi^2}, |f''(x)|\le \frac{4\pi^2+4\pi+2}{\pi^3}.$$

ב. $$|R|=|\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}|\le \frac{(2\pi+1)\pi^2}{\pi^2 2n}=\frac{2\pi+1}{2n}$$

ג.

$$|R|=|\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}|\le \frac{4\pi^2+4\pi+2}{\pi^3}\frac{\pi^3}{12n^2}=\frac{4\pi^2+4\pi+2}{12n^2}=$$
$$=\frac{2\pi^2+2\pi+1}{6n^2}$$

ד.

$$\frac{2\pi^2+2\pi+1}{6n^2}\le \frac{2\pi+1}{1000n2}\to 2000\frac{2\pi^2+2\pi+1}{6(2\pi+1)}\le n\to$$
$$\frac{2000\pi^2+2000\pi+1000}{3(2\pi+1)}\le n$$

תשובה 4

א,ב.

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-6=0\to x^3=-2x^2+5x+6\to x=\sqrt[3]{-2x^2+5x+6}=g(x),$$
$$g'(x)=\frac{5-4x}{3g^2}, g'(-1)=\frac{9}{3}=3, g'(-3)=\frac{17}{27}, g'(2)=\frac{-3}{12}.$$

לכן מינוס 1 דוחה, מינוס 3 מושכת ו 2 מושכת עוד יותר חזק.

ג,ד.

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-6=0 \to 2x^2=-x^3+5x+6 \to x=\sqrt{\frac{-x^3+5x+6}{2}}=g(x),$$

$$g'(x)=\frac{-3x^2+5}{4g}, g'(-1)=\frac{2}{4}=0.5, g'(-3)=\frac{-22}{12}, g'(2)=\frac{-7}{8}.$$

לכן מינוס 3 דוחה, 2 מושכת ומינוס 1 מושכת עוד יותר חזק.

ה.

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-5,\ f'=3x^2+4x-5,\ f''=6x+4,\ f'=0 \to x=\frac{-4\pm\sqrt{16+60}}{6}\sim -2.11, 0.786,$$

$$f''>0 \to x>-0.666,\ f(1)=-5,\ f(2)=1, [a,b]=[1,2], M=f''(2)=16, m=f'(1)=2.$$

מצאנו את הקטע, כעת נחשב את השגיאה:

$$|x_{n+1}-L|\le \frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2=\frac{16}{4}(x_{n+1}-x_n)^2\le 0.01 \to (x_{n+1}-x_n)^2\le 0.0025$$
$$\to |x_{n+1}-x_n|\le 0.05$$

וכעת את הסדרה

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-5, \to g=x-\frac{f}{f'}=x-\frac{x^3+2x^2-5x-5}{3x^2+4x-5}=\frac{2x^3+2x^2+5}{3x^2+4x-5}, x_0=2,$$

$$x_1=g(2)=\frac{16+8+5}{12+8-5}=\frac{29}{15}\sim 1.933, |x_0-x_1|=\frac{1}{15}=0.0666..., x_2=g(29/15)=$$

$$=\frac{2\cdot 24389/3375+2\cdot 841/225+5}{3\cdot 841/225+4\cdot 29/15-5}=\frac{2\cdot 24389+2\cdot 841\cdot 15+5\cdot 3375}{3\cdot 841\cdot 15+4\cdot 29\cdot 225-5\cdot 3375}=$$

$$=\frac{48778+25230+16875}{37845+25810-16875}=\frac{90883}{46780}\sim 1.942, |x_2-x_1|=\frac{29}{15}-\frac{90883}{46780}=\frac{29\cdot 9356}{15\cdot 9356}-\frac{3\cdot 90883}{3\cdot 46780}=$$

$$=\frac{271324-272649}{140340}=\frac{1325}{140340}=0.009441<0.05$$

תשובה 6

נביט על

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x^4+1} & 0\le x \end{cases}$$

אז $f(0+)=f(0-)=0$ ולכן f רציפה. אז גם

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x\le 0 \\ \dfrac{2x(x^4+1)-4x^3x^2}{(x^4+1)^2}=\dfrac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2} & 0\le x \end{cases}$$

אז $f'(0+)=f'(0-)=0$ ולכן f גזירה. כדי ש f' תתאפס, אחת מהנוסחאות צריכה להתאפס וזה קורה רק כאשר $x=0$, ולכן יש לפונקציה שורש יחיד.

נניח כי x_0 שלילי. אז $g(x)=x-\dfrac{f}{f'}=x-\dfrac{x^2}{2x}=\dfrac{x}{2}$ כלומר

הסדרה תתכנס ל0 כסדרה גיאומטרית.

נניח כי x_0 חיובי. אז

$$g(x)=x-\frac{f}{f'}=x-\frac{\dfrac{x^2}{x^4+1}}{\dfrac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2}}=x-\frac{x(x^4+1)}{2(1-x^4)}=$$

$$=\frac{x2(1-x^4)-x(x^4+1)}{2(1-x^4)}=\frac{x-3x^5}{2(1-x^4)}=$$

נניח כי x_0 גדול מ-1, אז

$$g(x)=\frac{x-3x^5}{2(1-x^4)}=\frac{3x^5-x}{2(x^4-1)};$$

$$x<g(x)\leftrightarrow x<\frac{3x^5-x}{2(x^4-1)}\leftrightarrow$$

$$2(x^5-x)<3x^5-x\leftrightarrow 0<x^5+x$$

כלומר אם הנחוש ההתחלתי גדול מ-1 הסדרה רק תלך ותגדל ולכן
תתרחק מהשורש היחיד.