NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

**המכללה האקדמית נתניה**
**רח' האוניברסיטה 1**
**קרית יצחק רבין**
**נתניה 42365**

**<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית לכתת הנדסאי ערב.</u>**

מועד ב יום ב  כט אב התשס"ז, 13-8-2007 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 8 שאלות.  על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 16 נקודות..
- שאלה 6 שאלת הוכחה.
- שאלות 7-8  הן שאלות הבנה (כן-לא).  משקל כל אחת 5 נקודות.  בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

16*5+10+2*5=80+10+10=100

**בהצלחה.**

**Fax:** (972-9) 8607711 **:פקס**     **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{16+3x}$

א. מצא n טבעי עבורו פולינום טיילור בקטע [0,0.1] יהיה בדיוק של 2/1,000,000.

ב. כתב את הפולינום.

ג. חשב את $\sqrt[4]{16.3}$ בדיוק של 2/1,000,000.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{512+217x}, 0\le x\le 1$

נניח כי נתונות נקודות $0=a_0<a_1<....<a_{n-1}<a_n=1$ וכי $p_n$ הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו $p_n$ בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^3 e^{x^3}dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם $n=2m$ קטעים שוים. מצא מהו $n$ שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^4-10x^2+9$.

א. מצא את ארבעת השרשים של $p$ (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר $x^4$ באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $g(x)=x$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3-30x^2+299x-989.8$.

א. מצא תחום $[a,b]$ שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים. רמז: $a,b$ לאו דוקא שלמים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.001.

שאלה 6

הוכח את משפט נקודת השבת.

שאלה שביעית

א. נתונה פונקציה $f$ המוגדרת על הקטע $[a,b]$, וחלקו אותו לשלשה קטעים שווי אורך, $[a,(2a+b)/3],[(2a+b)/3,(a+2b)/3],[(a+2b)/3,b]$. על כל קטע ציירו טרפז. למשל

הטרפז הראשון קדקדיו הם $(a,f(a)),((2a+b)/3,f((2a+b)/3))$. חשבו את השטח מתחת לשלשת טרפזים הללו. קבלנו קרוב של $\int_a^b f(x)dx$

ב. נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע $[c,d]$, וחלקו אותו ל-n קטעים שווים. את נוסחת הקרוב של הסעיף הקודם אפשר להפעיל כעת על כל אחד מהקטעים הקטנים. מתקבלת נוסחת קרוב עבור $\int_c^d f(x)dx$

חשב את נוסחת השגיאה של נוסחת הקרוב של הסעיף הקודם (בתנאי ש f גזירה פעמים בקטע $[c,d]$). כתבו כתשובה סופית (ותקבלו נקוד מלא) את נוסחת השגיאה שהגעתם אליה.

שאלה שמינית

נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע $[a,b]$, חלקו אותו ל-n קטעים שווים n טבעי וקרבו את $\int_a^b f(x)dx$ בשתי דרכים שונות: פעם על ידי שיטת סכומי רימן (עם נקודת בינים בשמאל) ופעם על ידי סכומי טרפזים. מי מהטענות הבאות נכונה? נמק בקצרה:

א. תמיד סכומי רימן יקרבו יותר טוב את $\int_a^b f(x)dx$

ב. תמיד סכומי הטרפזים יקרבו יותר טוב את $\int_a^b f(x)dx$

ג. לפעמים סכומי רימן ולפעמים סכומי הטרפזים יקרבו יותר טוב את $\int_a^b f(x)dx$

תשובות:

שאלה 1.

$$f(x)=\sqrt[4]{16+3x}=(16+3x)^{\frac{1}{4}},\ f'(x)=\frac{1}{4}3(16+3x)^{\frac{-3}{4}},$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}3^2(16+3x)^{\frac{-7}{8}},\ f'''(x)=\frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}3^3(16+3x)^{\frac{-11}{4}},$$

$$\ldots..,\ f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}\ldots\frac{5-4n}{4}3^n(16+3x)^{\frac{1-4n}{4}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}\ldots\frac{5-4n}{4}\frac{1-4n}{4}3^{n+1}(16+3x)^{\frac{-3-4n}{4}}$$

ולכן:

$$R=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}\ldots\frac{5-4n}{4}\frac{1-4n}{4}3^{n+1}(16+3c)^{\frac{-3-4n}{4}}h^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|R|=\frac{3}{4\cdot1}\frac{7}{4\cdot2}\ldots\frac{4n-5}{4\cdot(n-1)}\frac{4n-1}{4\cdot n}\frac{3^{n+1}h^{n+1}}{4(n+1)(16+3c)^{\frac{3+4n}{4}}}\le$$

$$\le 1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\frac{3^{n+1}h^{n+1}}{4(n+1)(16+3c)^{\frac{3+4n}{4}}}\le\frac{3^{n+1}0.1^{n+1}}{4(n+1)(16+3\cdot0)^{\frac{3+4n}{4}}}=$$

$$=\frac{3^{n+1}\cdot0.1^{n+1}}{4(n+1)2^{3+4n}}=\frac{3^{n+1}\cdot0.1^{n+1}}{2(n+1)2^{4+4n}}=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{3}{160}\right)^{n+1}\le\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{50}\right)^{n+1}$$

ולכן נציב כמה n-ים קטנים ונקבל:

$$|R|\le\frac{1}{2(n+1)\cdot50^{n+1}},\ 2(1+1)\cdot50^2=10000,\ 2(2+1)\cdot50^3=750000.$$

כלומר טור טיילור מסדר 2 מספיק מדויק.

נחשב את הטור.

$$f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)h^2}{2}=\sqrt[4]{16+3\cdot 0}+\left(\frac{1}{4}3(16+3\cdot 0)^{\frac{-3}{4}}\right)h,$$
$$+\left(\frac{1}{4}\frac{-3}{4}3^2(16+3\cdot 0)^{\frac{-7}{4}}\right)\frac{h^2}{2}=2+\frac{3h}{32}-\frac{27h^2}{4096}$$

ולכן:

$$\sqrt[4]{16.3}=f(0.1)=f(0+0.1)\approx f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)h^2}{2}=$$
$$=2+\frac{3}{320}-\frac{27}{409600}=2+\frac{3840}{409600}-\frac{27}{409600}=$$
$$=2+\frac{3813}{409600}=2.00930908203125$$

בדיקה:

$$2.00930908203125^4=16.2999769023$$

שאלה 2.

$$f(x)=\sqrt[3]{512+217x},0\le x\le 1$$

$$f(x)=\sqrt[3]{512+217x}=(512+217x)^{\frac{1}{3}},\ f'(x)=\frac{1}{3}217(512+217x)^{\frac{-2}{3}},$$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}217^2(512+217x)^{\frac{-5}{3}},\ f'''(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}217^3(512+217x)^{\frac{-8}{3}},$$

$$.....,\ f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}...\frac{4-3n}{3}217^n(512+217x)^{\frac{1-3n}{3}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}...\frac{4-3n}{3}\frac{1-3n}{3}217^{n+1}(512+217x)^{\frac{-2-3n}{3}}$$

ולכן:

$$R=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}...\frac{4-3n}{3}\frac{1-3n}{3}217^{n+1}(512+217c)^{\frac{-2-3n}{3}}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!},$$

$$|R|=\frac{2}{3\cdot 1}\frac{5}{3\cdot 2}...\frac{3n-4}{3\cdot(n-1)}\frac{3n-1}{3\cdot n}\frac{217^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3(n+1)(512+217c)^{\frac{2+3n}{3}}}\le$$

$$\le 1\cdot 1\cdot ...\cdot 1\frac{217^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3(n+1)(512+217c)^{\frac{2+3n}{3}}}\le\frac{217^{n+1}1^{n+1}}{3(n+1)(512+217\cdot 0)^{\frac{2+3n}{3}}}=$$

$$=\frac{217^{n+1}}{3(n+1)8^{2+3n}}=\frac{8}{3(n+1)}\frac{217^{n+1}}{(8^3)^{n+1}}\le\frac{3}{n+1}(\frac{217}{512})^{n+1}\le\frac{3}{n+1}(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{3}{(n+1)2^n}$$

נפתר את אי השויון:

$$\frac{3}{n+1}(\frac{1}{2})^n\le 0.001\to 3000\le(n+1)2^n$$

נציב כמה ערכים של n ונקבל כי n=9 פותר את אי השויון.:

כלומר יש לחשב את הפולינום עד דרגה 9.

## שאלה 3

$$f=e^{x^3},\ f'=3x^2e^{x^3},\ f''=(3x^2)^2e^{x^3}+6xe^{x^3}=e^{x^3}(6x+9x^4),$$
$$f'''=3x^2(6x+9x^4)e^{x^3}+(6+36x^3)e^{x^3}=(6+54x^3+27x^6)e^{x^3},$$
$$f''''=3x^2(6+54x^3+27x^6)e^{x^3}+(162x^2+162x^5)=$$
$$(180x^2+324x^5+81x^8)e^{x^3}.$$
$$f'''''=3x^2(180x^2+324x^5+81x^8)e^{x^3}+(360x+1620x^4+648x^7)e^{x^3},0\le f'''''$$

ולכן f'''' עולה ולכן:

$$f''''(c)\le \max_{0\le x\le 3} f''''(c)=f''''(3)=(180\cdot 9+324\cdot 3^5+81\cdot 3^3)e^{3^3}=$$
$$=81\cdot(20+972+27)e^{27}=81\cdot 1019e^{27}$$

ולכן:

$$R=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}\le\frac{81\cdot 1019e^{27}3^5}{180n^4}=\frac{1019e^{27}3^7}{20n^4}\le 0.001$$
$$\rightarrow\frac{1019e^{27}3^7 1000}{20}=50950\cdot 2187\cdot 5.320\cdot 10^{11}=5.9284885\cdot 10^{19}\le n^4\rightarrow$$
$$\rightarrow 87747.7513\le n$$

ולכן כיון ש-n חיב להיות זוגי, n□87748,m□43874.

## שאלה רביעית

$$p(x)=x^4-10x^2+9 \to u=x^2 \to u^2-10u+9=$$
$$(u-1)(u-9)=(x^2-1)(x^2-9)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$
$$\to x^4=10x^2-9 \to x=\sqrt[4]{10x^2-9}=g(x)$$

בדיקה:

$$g(x)=\sqrt[4]{10x^2-9}, g(\pm1)=\pm1, g(\pm3)=\pm3.$$

וכעת נחליט אודות האופי של כל נקודת שבת:

$$g(x)=\sqrt[4]{10x^2-9}, g'(x)=\frac{20x}{4(\sqrt[4]{10x^2-9})^3}=\frac{5x}{(g(x))^3}, g'(\pm1)=\frac{5(\pm1)}{(\pm1)^3}=5,$$
$$g'(\pm3)=\frac{5(\pm3)}{(\pm3)^3}=\frac{5}{9}.$$

ולכן הנקודות המושכות הן $\pm3$.

שאלה חמישית

נביט בפולינום ונציב נקודות.

$$f(x)=x^3-30x^2+299x-989.8=((x-30)x+299)x-989.8$$
$$f(1)=((1-30)+299)-989.8=-769.8<0,$$
$$f(5)=((5-30)5+299)5-989.8=-129.8<0,$$
$$f(7)=((7-30)7+299)7-989.8=-23.8<0,$$
$$f(8)=((8-30)8+299)8-989.8=26.2>0$$
$$f'=3x^2-60x+299>0,\ f''=6x-60$$

רואים כי כדי שיתקיים $f''>0$, צריך שיתקיים $x>10$ ולכן הקטע $[7,8]$ איננו טוב. נמצא מתי $f'=0$, ונקבל כי

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{60\pm\sqrt{60^2-4\cdot 3\cdot 299}}{6}=\frac{60\pm\sqrt{12}}{6}=$$
$$=\frac{60\pm 2\sqrt{3}}{6}=10\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 9.4,10.6.$$

לכן כדי שיתקיים $f',f''>0$ עלינו להתיחס לקטע החל מ-10.6 ואילך. נמשיך להציב:

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^3-30x^2+299x-989.8=((x-30)x+299)x-989.8\\
&f(10)=((10-30)10+299)10-989.8=0.2>0,\\
&f(11)=((11-30)11+299)11-989.8=0.2>0,\\
&f(12)=((12-30)12+299)12-989.8=6.2>0,\\
&f(13)=((13-30)13+299)13-989.8=24.2>0
\end{aligned}$$

כלומר, 11 הוא ערך גדול מדי, ו-10 קטן מדי, ולכן, ננסה מספרים בין 10.6 לבין 11.

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^3-30x^2+299x-989.8=((x-30)x+299)x-989.8\\
&f(10.6)=((10.6-30)10.6+299)10.6-989.8=-0.084>0.
\end{aligned}$$

כלומר אם נבחר $a=10.6,b=11$. אז גם $f$ משנה סימן בקטע, וגם $f',f''$ חיוביות בקטע, וזהו קטע רצוי.

לכן נפעיל את השיטה ואז כיון ש-$f',f''$ הן פונקציות עולות:

$$\begin{aligned}
&m=inf(f')=f'(10.6)=3\cdot 10.6^2-60\cdot 10.6+299=0.08\\
&M=\sup(f'')=f''(11)=6\cdot 11-60=6,\\
&|x_{n+1}-\lim|\le\frac{M}{2m}|x_{n+1}-x_n|^2=\frac{6}{2\cdot 0.08}|x_{n+1}-x_n|^2=37.5|x_{n+1}-x_n|^2
\end{aligned}$$

ולכן:

$$37.5|x_{n+1}-x_n|^2<0.001\to|x_{n+1}-x_n|^2<\frac{1}{37500}\to$$
$$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{193.64916}=0.005163977$$

כלומר ברגע שהמרחק בין קרובים עוקבים קטן מ-0.005163977 הרי שהקרוב האחרון קרוב לשרש עד כדי 0.001. וכעת:

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^3-30x^2+299x-989.8}{3x^2-60x+299}=\frac{(3x^3-60x^2+299x)-(x^3-30x^2+299x-989.8)}{3x^2-60x+299}=$$
$$=\frac{2x^3-30x^2+989.8}{3x^2-60x+299},x_0=11,x_1=g(11)=\frac{21.8}{2}=10.9,x_2=g(10.9)=\frac{15.58}{1.43}=10.8\overline{797202}$$
$$x_3=g(10.8797202)=\frac{14.3788778373}{1.321}=10.8788864587044,$$
$$x_2-x_3=0.0008337292677<0.00516$$

כלומר כבר $x_3$ מקים את הדרוש.

תשובה 7

זו פשוט נוסחת השגיאה של הטרפז עבור 3n כלומר השגיאה היא

$$\frac{f''(c)(b-a)^3}{12(3n)^2}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{108n^2}$$

תשובה 8

לפעמים סכומי רימן טובים יותר ולפעמים סכומי הטרפזים. נבחר a=0,b=1,n=1 כלומר עוסקים בפונקציות על הקטע [0,1] ולא מחלקים אותו לתתי קטעים. נביט בפונקציה $f(x)=x^n$. אז סכום רימן עם קטע אחד ונקודת בינים בשמאל שוה ל-0, וסכום הטרפזים עם טרפז יחיד העובר בנקודות (0,0),(1,1) הוא 0.5. נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

עבור n=1 האינטגרל יוצא בדיוק שוה לטרפז, ואילו עבור n=4 האינטגרל שוה ל-0.2 אשר קרוב יותר לסכום רימן.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ . אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$ , או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_nf(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n| \leq M^n(b-a)$, $M=\sup g'(x)$, $a \leq x \leq b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \leq \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $m=\inf f'$, $M=\sup f''$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.