



**מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית.**

מועד ב, יום ד, יב אדר ב התשס"ח 19-3-2008

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
  - משך המבחן שעתים וחצי.
  - מותר להשתמש במחשבוניו ובדפי הנוסחאות המצורפים.
  - התשובות תכתבנה במחברת.
  - המבחן כולל 9 שאלות.
  - שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 14 נקודות.
  - שאלה 6 שאלה חשובית בת משקל של 10 נקודות.
  - שאלה 7 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
  - שאלות 8-9 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות.
- בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

$$14*5+2*10+2*5=70+20+10=100$$

## בהצלחה.

### שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{16+bx}$  משתנה  $x$ ,  $0 \leq b$  פרמטר.

א. חזור על תהליך הערכת השגיאה כפי שעשינו בכתה, והחלט עבור אלו ערכים של  $b$ , טור טיילור מתכנס בקטע  $[0,0.2]$ .

ב. מהו  $b$  המקסימלי מבין אלו שמצאת בסעיף א?

ג. עבור  $d=b/2$ , כאשר את  $b$  מצאת בסעיף ב, מצא מהו  $n$  שיבטיח כי המרחק שבין פולינום טיילור מסדר  $n$  ובין הפונקציה המקורית קטן מ-0.01.

ד. עבור  $d$  זה, כתוב את הפולינום.

ה. חשב את השרש בקרוב של 0.01 עבור  $d$  שמצאת בסעיף ג ו- $x=0.21$ .

שאלה שניה

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{8000 + 1261x}, 0 \leq x \leq 1$

נניח כי נתונות נקודות  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$  וכי  $p_n$  הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא  $n$  טבעי עבורו  $p_n$  בקטע  $[0,1]$  יהיה בדיוק של  $0.001$ .

שאלה שלישית

נתון האינטגרל  $\int_0^{\sqrt{3}/2} \sin(x^2) dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם  $n=2m$  קטעים שווים. מצא מהו  $n$  שיבטיח כי השגיאה קטנה מ- $0.001$ .

שאלה רביעית

הבט בפולינום  $p=x^3-13x-12$ .

א. מצא את שלשת השרשים של  $p$  (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר  $x^3$  באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל

משואה מהצורה  $g(x)=x$ .

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה

היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת  $x_{n+1}=g(x_n)$ .

ד. מיהי הנקודה שאליה הסדרה המבוססת על שיטת נקודות השבת מתכנסת

הכי מהר?

שאלה חמישית

הבט בפולינום  $p=x^3-7x+7$ .

א. מצא תחום  $[a,b]$  שבו מתקיימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת

ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.01.

שאלה 6

נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$ . א. חשב את  $\|A\|_\infty$ . ב. מצא וקטור  $v$  כך

$$\|A(v)\|_\infty = \frac{\|A\|_\infty}{\|v\|_\infty} \quad \text{ש-}$$

## שאלה 7

נסה והוכח את משפט נקודת השבת עבור  $\mathbb{R}$  אשר משתמש בקבוע ליפשיץ.

## שאלה 8

נתונה פונציה  $f$  רציפה בקטע  $[a,b]$  וידוע כי  $f(a)f(b) < 0$ . נמצא שרש על ידי שיטת החציה אשר מתבססת על הקטע  $[a,b]$  ונקבל סדרות  $a_n, b_n$ . נתון כי  $f$  גם רציפה בקטע  $[c,d]$  וכי  $f(c)f(d) < 0$ . שוב נשתמש בשיטת החציה עבור הקטע  $[c,d]$  ונקבל סדרות  $c_n, d_n$ . אז הגבול של הסדרות  $a_n, b_n$  שווה תמיד לגבול של הסדרות  $c_n, d_n$ .

## שאלה 9

נתונה פונציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ . מחושב סכום רימן עבור האינטגרל של  $f$  המבוסס על חלוקת  $[a, b]$  ל-  $k$  חלקים שווים שיסומן  $SR(k)$ . נסמן ב-  $E(k)$  את השגיאה - ערך מוחלט של ההפרש שבין האינטגרל ו-  $SR(k)$ . אז תמיד  $E(2k) < E(k)$  (ולא שווה) ל  $E(k)$ .

דף נוסחאות עבור המבחן בנומריית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנו עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b) - f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0) \cdots (x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \dots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I,  $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$ ,

$$SR = h \sum_{i=1}^n f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \dots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שווים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שווים

$$ST = \frac{h}{2} (f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שווים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3} (f(a) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(a + 2kh) + 4 \sum_{k=0}^{m-1} f(a + 2kh + h) + f(b)), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:



$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0, b_0$ . נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש-  $f(a_0)f(b_0) < 0$ . בהנתן  $a_n, b_n$  נקודות עם אותן הנחות, נגדיר  $c_n = (a_n + b_n)/2$ , ונביט על  $f(c_n)$ . אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז  $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$ , או,  $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$ . הדבר נקבע כך ש-  $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$ .

שיטת ניוטון רפסון- (המשיק):

$x_0$ . נקודה שנקבעה בנחוש. אז  $x_{n+1} = g(x_n)$ , כאשר  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0, x_1$ . נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם  $x_n \rightarrow 1$ )

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$$|E_n| \leq M^n (b-a), M = \sup g'(x), a \leq x \leq b$$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$|x_{n+1} - L| \leq \frac{M}{2m} (x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר  $M = \sup f''$ ,  $m = \inf f'$  בקטע  $[a, b]$  שבו  $f(a)f(b) < 0$  וגם  $f, f' > 0$ .



תשובות

תשובה ראשונה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x) = \sqrt{16+bx} = (16+bx)^{1/2}, f'(x) = \frac{b(16+bx)^{-1/2}}{2}, f''(x) = \frac{(-1)b^2(16+bx)^{-3/2}}{2^2},$$

$$\dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)(-3)\dots(-(2n-3))b^n(16+bx)^{-(2n-1)/2}}{2^n}.$$

$$R(n) = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)(-3)\dots(-(2n-1))b^{n+1}h^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)![\sqrt{(16+bc)}]^{2n+1}}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} |R(n)| &= \frac{1*3*\dots*(2n-1)b^{n+1}h^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)![\sqrt{(16+bc)}]^{2n+1}} = \\ &= \frac{1}{2*1} \frac{3}{2*2} \dots \frac{2n-1}{2*n} \frac{b^{n+1}h^{n+1}}{2(n+1)[\sqrt{(16+bc)}]^{2n+1}} \leq 1 * \frac{b^{n+1}h^{n+1}}{2(n+1)[\sqrt{(16+b*0)}]^{2n+1}} = \\ &= \frac{b^{n+1}0.2^{2n+1}}{2(n+1)4^{2n+1}} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}2^{4n+3}} = \left(\frac{b}{80}\right)^{n+1} \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

ולכן הטור יתכנס עבור  $0 \leq b \leq 80$

$$\text{נציב } d=40 \text{ ונקבל } |R(n)| \leq \left(\frac{40}{80}\right)^{n+1} \frac{2}{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^n}$$

נציב ערכים של  $n$

ונראה כי עבור  $5 \leq n$  החסם קטן מ-0.01.

נחשב את הפולינום הזה:

$$\begin{aligned} \sqrt{16+dx} &\approx (16+d*0)^{1/2} + \frac{d(16+d*0)^{-1/2}h}{2} + \frac{(-1)d^2(16+d*0)^{-3/2}h^2}{2^2*2!} \\ &+ \frac{3d^3(16+d*0)^{-5/2}h^3}{2^3*3!} + \frac{(-15)d^4(16+d*0)^{-7/2}h^4}{2^4*4!} + \\ &\frac{105d^5(16+d*0)^{-9/2}h^5}{2^5*5!} = \\ &= 4 + \frac{40h}{8} - \frac{1600h^2}{2^9} + \frac{3*64000h^3}{2^{13}6} - \frac{15*2560000h^4}{2^{18}24} + \frac{105*102400000h^5}{2^{23}120} = \\ &= 4 + 5h - \frac{25h^2}{8} + \frac{125h^3}{32} - \frac{5^5h^4}{512} + \frac{7 \cdot 5^5h^5}{2048} \end{aligned}$$

ולבסוף נציב  $x=h=0.2$  ונקבל:

$$4 + 5h - \frac{25h^2}{8} + \frac{125h^3}{32} - \frac{5^5 h^4}{512} + \frac{7 \cdot 5^5 h^5}{2048} \xrightarrow{h=0.2} \sqrt{16 + 40 \cdot 0.2} = \sqrt{24} \approx$$

$$4 + 5 \cdot 0.2 - \frac{25 \cdot 0.2^2}{8} + \frac{125 \cdot 0.2^3}{32} - \frac{5^5 \cdot 0.2^4}{512} + \frac{7 \cdot 5^5 \cdot 0.2^5}{2048} =$$

$$4 + 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{5}{512} + \frac{7}{2048} = 5 + \frac{-256 + 64 - 20 + 7}{2048} =$$

$$5 - \frac{205}{2048} = \frac{10035}{2048} = 14.899902375$$

נשווה עם המחשבון

$$\sqrt{24} \approx 4.8989794, R = 0.00093$$

תשובה שנייה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x) = \sqrt[3]{8000 + 1261x}, f'(x) = \frac{1261(8000 + 1261x)^{-2/3}}{3},$$

$$f''(x) = \frac{(-2)1261^2(8000 + 1261x)^{-5/3}}{3^2}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-2)(-5)\dots(-(3n-4))1261^n(8000 + 1261x)^{-(3n-1)/3}}{3^n}.$$

$$R(n) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-2)(-5)\dots(-(3n-1))1261^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{8000 + 1261x}^{3n+2}}$$

ולכן

$$\begin{aligned} |R(n)| &= \frac{|(-2)(-5)\dots(-(3n-1))| 1261^{n+1} (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{3^{n+1} (n+1)! \sqrt[3]{8000+1261c}^{3n+2}} = \\ &= \frac{2}{3*1} \frac{5}{3*2} \dots \frac{3n-1}{3*n} \frac{1261^{n+1} (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{3(n+1) \sqrt[3]{8000+1261c}^{3n+2}} \leq \\ &1 * \frac{1261^{n+1} 1*1*\dots*1}{3(n+1) \sqrt[3]{8000+1261*0}^{3n+2}} \leq \frac{1261^{n+1}}{3(n+1) 20^{3n+2}} = \\ &= \frac{20*1261^{n+1}}{3(n+1) 20^{3n+3}} = \frac{20}{3(n+1)} \frac{1261^{n+1}}{20^{3n+3}} = \frac{20}{3(n+1)} \left(\frac{1261}{8000}\right)^{n+1} \\ &\leq \frac{20}{3(n+1)} (0.16)^{n+1} \leq \frac{20}{3(n+1)} (0.4)^{2(n+1)} \leq \frac{20}{3(n+1)} (0.5)^{2(n+1)} = \\ &\frac{20}{3(n+1) 2^{2(n+1)}} = \frac{20}{3(n+1) 4^{n+1}} \leq \frac{5}{3(n+1) 4^n} \end{aligned}$$

ולכן:

$$|R(n)| \leq \frac{5}{3(n+1)4^n} < \frac{1}{1000} \rightarrow \frac{5000}{3} = 1666.666 < (n+1)4^n$$

כיון שהבטוי האחרון הוא פונקציה עולה של  $n$  מספיק לבדוק על ידי הצבה מהו ה- $n$  הראשון שבו הוא עובר את 1666. נציב ונראה כי  $n=5$  הוא הראשון.

תשובה שלישית

נגזור ונקבל:

$$\begin{aligned} f &= \sin(x^2), f' = 2x \cos(x^2), f'' = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2), \\ f''' &= -4x \sin(x^2) - 8x \sin(x^2) - 8x^3 \cos(x^2) = -12x \sin(x^2) - 8x^3 \cos(x^2), \\ f^{(4)} &= -12 \sin(x^2) - 24x^2 \cos(x^2) - 24x^2 \cos(x^2) + 16x^4 \sin(x^2) = \\ &= -12 \sin(x^2) - 48x^2 \cos(x^2) + 16x^4 \sin(x^2) = \\ &= (16x^4 - 12) \sin(x^2) - 48x^2 \cos(x^2). \end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} |f^{(4)}| &= |(16x^4 - 12) \sin(x^2) - 48x^2 \cos(x^2)| \leq (16x^4 - 12) |\sin(x^2)| \\ &+ |48x^2 \cos(x^2)| \leq (16x^4 - 12) + |48x^2|. \end{aligned}$$

בתחום  $[0, \sqrt{3}/2]$  המחובר  $48x^2$  הוא חיובי והמחובר  $16x^4 - 12$  הוא שלילי, ולכן נקבל סוף סוף כי  $g(x) = |f^{(4)}| = 12 - 16x^4 + 48x^2$ . נחשב את הנגזרת של פונקציה זו כדי למצוא את הנקודה המרבית שלה ונקבל כי



ובתחום שלנו שני הכופלים של

$$g(x) = |f''''| = 12 - 16x^4 + 48x^2,$$

$$g'(x) = -64x^3 + 96x = 32x(3 - 2x^2).$$

הבטוי האחרון חיוביים, לכן הנגזרת חיובית, לכן  $g$  עולה ולכן הנקודה המרבית שלה היא כאשר  $x = \sqrt{3}/2$  ולכן:

$$|f''''(c)| \leq |f''''(\sqrt{3}/2)| = 12 - 16(\sqrt{3}/2)^4 + 48(\sqrt{3}/2)^2 = 12 - 9 + 36 = 39$$

$$|R| = \frac{|f''''(c)|(b-a)^5}{180n^4} \leq \frac{39(\sqrt{3}/2)^5}{180n^4} \leq \frac{39 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{180n^4 \cdot 32}$$

ולכן:

$$\leq \frac{39 \cdot 9 \cdot 2}{180n^4 \cdot 32} = \frac{39}{320n^4} \leq \frac{1}{8n^4}$$

ולכן:

$$|R| \leq \frac{1}{8n^4} \leq \frac{1}{1000} \rightarrow \frac{1000}{8} = 125 \leq n^4 \rightarrow 3.3437 \leq n \rightarrow 4 \leq n$$

כיון ש- $n$  חיב להיות זוגי, נובע כי

$$4 \leq n \rightarrow 2 \leq \frac{n}{2} = m$$

תשובה רביעית

ולכן:  $p(x) = x^3 - 13x - 12 \rightarrow p(1) = -24, p(-1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 13x - 12 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

ולכן:

$$a=1, c=-12, 1+b=0, b-12=-13 \rightarrow b=-1.$$

ולכן:

$$p(x) = x^3 - 13x - 12 = (x+1)(x^2 - x - 12) = (x+1)(x+3)(x-4).$$

כלומר מצאנו את השרשים של f.

כעת נעביר את  $-13x-12$  ונקבל:

$$.x^3 = 13x+12 \rightarrow x = \sqrt[3]{13x+12} = g(x)$$

כעת נגזר את g ונציב את נקודות השבת בנגזרת:

$$g(x) = \sqrt[3]{13x+12} \rightarrow g'(x) = \frac{13}{3(\sqrt[3]{13x+12})^2} = \frac{13}{3g^2}$$

ולכן:

$$g'(-1) = \frac{13}{3g(-1)^2} = \frac{13}{3*(-1)^2} = \frac{13}{3} > 1, g'(-3) = \frac{13}{3g(-3)^2} = \frac{13}{3*(-3)^2} = \frac{13}{27} < 1,$$
$$g'(4) = \frac{13}{3g(4)^2} = \frac{13}{3*4^2} = \frac{13}{64} < 1$$

לכן 1- היא נקודה דוחה, 3-, 4, הן נקודות מושכות, ו-4 מושכת יותר כי הערך המוחלט של הנגזרת שלה הוא הקטן ביותר.

תשובה חמישית

$$f(x) = x^3 - 7x + 7, f' = 3x^2 - 7, f'' = 6x, f' = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{7/3} = \pm 1.5275$$

ולכן התחום שבו  $f', f'' > 0$  הוא עבור  $x > 1.5275$ . כעת נציב ערכים

$$f(x) = x^3 - 7x + 7, f(0) = 7, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 13, f(4) = 43$$

לכאורה נראה כי  $f$  חיובית בתחום כלו, ואפילו עולה. לכן ננסה ערכים שבין 1

ו-2.

$$f(x) = x^3 - 7x + 7, f(3/2) = 27/8 - 21/2 + 7 = (27 - 84 + 56)/8 = -1/8 < 0.$$

$$f(x) = x^3 - 7x + 7, f(1.6) = f(8/5) = 512/125 - 56/5 + 875/125 = (512 + 875 - 1400)/125 = -13/125 < 0$$

ולכן הקטע הרצוי הוא  $[1.6, 2]$ .

נזכר כי  $f', f''$  חיוביות בקטע זה ולכן שתיהן עולות: לכן:

$$f'(x) = 3x^2 - 7, f'(1.6) = 0.68, f'(2) = 5.$$

$$m = \inf(f') = f'(1.6) = 0.68.$$

$$M = \sup(f'') = f''(2) = 6 \cdot 2 = 12,$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \lim| &\leq \frac{M}{2m} |x_{n+1} - x_n|^2 = \frac{12}{2 \cdot 0.68} |x_{n+1} - x_n|^2 = \frac{6}{0.68} |x_{n+1} - x_n|^2 = \\ &= 8.8235 |x_{n+1} - x_n|^2. \end{aligned}$$

ולכן:

$$8.8235 |x_{n+1} - x_n|^2 < 0.01 \rightarrow |x_{n+1} - x_n| < 0.03366$$

כלומר עלינו למצא קרובים עוקבים אשר מרחקם קטן מ  $0.03366$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 7x + 7}{3x^2 - 7} = \frac{2x^3 - 7}{3x^2 - 7}$$

לפי המשפט נציב  $x_0=2$  ונקבל:

$$g(x) = \frac{2x^3 - 7}{3x^2 - 7}, x_0 = 2 \rightarrow x_1 = \frac{9}{5} = 1.8, x_2 = \frac{2(\frac{9}{5})^3 - 7}{3(\frac{9}{5})^2 - 7} = \frac{2 \cdot 9^3 - 7 \cdot 5^3}{3 \cdot 5 \cdot 9^2 - 7 \cdot 5^3} = \frac{1458 - 875}{5(243 - 175)} = \frac{583}{68 \cdot 5} = \frac{583}{340} = 1.714705$$

$$g(x) = \frac{2x^3 - 7}{3x^2 - 7}, x_2 = 1.714705, x_3 = \frac{2 \cdot 1.714705^3 - 7}{3 \cdot 1.714705^2 - 7} = 1.6934$$

מתקיים  $|x_3 - x_2| = 0.0213 < 0.0336$  ולכן  $x_3$  הוא הדרוש.

תשובה שישית

לפי טענה בספר יש לעבור עמודה עמודה של A ולסכם את הערכים המוחלטים של האיברים בכל עמודה, ואז לקחת את המכסימלי. עבור העמודה הראשונה יוצא 21, שניה 27 ושלישית 33, ולכן המכסימום שהוא גם הנורמה הוא 27. נביט בוקטור (1,1,1). נורמת המכסימום שלו היא 1, ומכפלת A בו יוצאת 27, כמו הנורמה.

תשובה שמינית

לא למשל  $f(x) = \sin(x), c = a = -\frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{2}, d = 5b = \frac{5\pi}{2}$  אז

והשרש  $e_1 = (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})/2 = \frac{\pi}{8}, f(e_1) > 0, [a_1, b_1] = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}]$

היחיד אליו הסדרות  $a_n, b_n$  תתכנסנה יהיה ב- $x=0$ , ולעומת זאת

$e_1 = (\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{4})/2 = \frac{9\pi}{8}, f(e_1) < 0, [c_1, d_1] = [\frac{9\pi}{8}, \frac{5\pi}{2}]$

והשרש היחיד אליו הסדרות  $c_n, d_n$  תתכנסנה יהיה ב- $x=2\pi$ .

תשובה תשיעית

לא למשל אם  $f=2$  פונקציה קבועה, לכל  $k$  מתקים  $SR(k)$  שזה ממש לאינטגרל,

ולכן השגיאה שזה קבוע ל-0, ולכן  $E(2k)$  שזה ממש ל- $E(k)$  כיון ששניהם

שווים 0.