דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$
$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$
$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n + 1$$
$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$
$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$.
הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1} f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n|\le M^n(b-a)$,
$M=\sup g'(x)$, $a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

יום ה, כ אדר ב התשס"ה 31-3-2005 מבחן מועד ב באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 2 חלקים. בחלק הראשון 5 שאלות בנות 37 סעיפים ביחד. כל סעיף שוה 2 נקודות וסה"כ 74 נקודות. בחלק השני 3 שאלות בנות 9 נקודות כ"א, וסה"כ 27 נקודות. הציון המקסימלי במבחן הוא 101 .

בהצלחה.

1. הבט בפונקציה $f(x)=x^2-9$ בקטע $[a0=0,b0=16]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. $b1=$, $a1=$

ב. $b2=$, $a2=$

ג. $b3=$, $a3=$

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את $en=bn-p$ כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. $e3=$, $e2=$, $e1=$, $e0=$

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

$e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

תשובה

א. $b1= 8$, $a1= 0$

ב. $b2= 4$, $a2= 0$

ג. $b3= 4$, $a3=2$

ד. $e3=1$, $e2=1$, $e1=5$, $e0=13$

ה. $e3/e2=1$, $e2/e1=0.2$ $e1/e0=0.384$

.2

הבט על x^2-16 ו $x0=1$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x1=$

ב. $x2=$

ג. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e0=$, $e1=$, $e2=$, $e3=$

ה. חשב את e_{n+1}/e_n $e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $e_{n+1}/(e_n)^2$
$e1/(e0)^2=$, $e2/(e1)^2=$, $e3/(e2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?
תשובה:

תשובה

א. $x1= 17/2=8.5$

ב. $x2=353/68=5.19$

ג. $x3=198593/48008=4.136$

ד. $e0=-3$, $e1=4.5$, $e2=1.19$, $e3=0.136$

ה. $e1/e0=-1.5$, $e2/e1=0.264$, $e3/e2=0.114$

ו. תשובה: 0

ז. $e1/(e0)^2=0.5$, $e2/(e1)^2=0.058$, $e3/(e2)^2=0.096$

ח. תשובה: 0.125

3.

הבט ב- $f(x)=x^3-9x^2+23x-15=(x-1)(x-3)(x-5)$.

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x0 קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב $x0=10$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $xn+1=g(xn)$.

ה. $x1=$

ו. $x2=$

ז. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $en=xn-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e3=$ $e2=$, $e1=$, $e0=$

ט. חשב את $en+1/en$ $e3/e2=$, $e2/e1=$, $e1/e0=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

א. תשובה: $g(x)=\sqrt[3]{(9x^2-23x+15)}$

ב. הנקודות הן:1,3,5

ג. הנקודות הללו הן 5

ד. הנקודות הללו הן 1,3

ה. $x1=\sqrt[3]{685}=8.8151$

ו. $x2=\sqrt[3]{511.6147}=7.99799$

ז. $x3=\sqrt[3]{406.7571}=7.4093$

ח. $e3=2.4093$ $e2=2.99799$, $e1=3.8151$, $e0=5$

ט. $e3/e2=0.803638$, $e2/e1=0.7858221$, $e1/e0=0.7632$

י. תשובה: $g'(5)=67/75=0.89333$

שאלה 4

בשאלה זו תתבקש לחשב לחשב סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים של x^2+2x על הקטע [1,4] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי 5 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ז. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף ו קטנה מ-0.001 .

תשובה:
$N=$

ח. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

ט. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:
$N=$

תשובה לשאלה 4

$$SR=\frac{3}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{3k}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+2\frac{3k}{n}+\frac{9k^2}{n^2}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{3k}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{n}\left(n+\frac{6}{n}\frac{(n-1)n}{2}+\frac{9}{n^2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+2n+\frac{6}{n}\frac{(n-1)n}{2}\right)=$$

$$=3+9\frac{n-1}{n}+\frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}+6+9\frac{n-1}{n}=$$

$$=9+18\frac{n-1}{n}+\frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}9+18+9=36=\int_1^4(x^2+2x)dx.$$

א. 3

ב. 9(n-1)/n

ג. 9(n-1)(2n-1)/2n²

ד 6

ה. 9(n-1)/n

$$E(SR) = 9 + 18 + 9 -$$

$$[9 + \frac{18(n-1)}{n} + \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}] =$$

$$= 18[1 - \frac{(n-1)}{n}] + 9[1 - \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}] =$$

$$= \frac{18}{n} + \frac{9(3n-1)}{2n^2} = \frac{36n + 9(3n-1)}{2n^2} = \frac{63n-9}{2n^2}$$

ו. 63n-9/2n^2

ז. 63n-9/2n^2<0.001→0<n^2-31500n+4500→31499.855<n

$$R(SR) = \frac{f\,'(c)(b-a)^2}{2n} = \frac{(2c+2)(3)^2}{2n} = \frac{9(2c+2)}{2n} \leq \frac{90}{2n} = \frac{45}{n}$$

ח. 45/n

ט. 45/n<0.001→45000<n

שאלה 5

נתונה המשואה $x^3-15x^2+60x-10=0$.

א. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

ד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

ה. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

תשובה לשאלה 5

א. קל לראות כי $f(0)=-10<0, f(1)=36>0$ ולכן יש שרש בקטע $[0,1]$.
ב. נשאיר את $60x$ בצד אחד, נעביר את כל שאר המחוברים לצד שני ונקבל: $g(x)=[10+15x^2-x^3]/60$.
ג. נחשב את הנגזרת $g'(x)=(30x-3x^2)/60=(10x-x^2)/20=x(10-x)/20$. נשים לב כי g' עולה בקטע $[0,1]$ $g'(0)=0,g'(1)=9/20$ כלומר בקטע זה $M=9/20=0.45$. עוד נשים לב כי $g(0)=10/60,g(1)=24/60$ כלומר מתקימים תנאי המשפט.

ד. $|En| \le (0.45)^n(1-0)$. ה. $(9/20)^4<0.1$ ולכן $(9/20)^8<0.01$. נבדק במחשבון $(0.45)^5=0.018>0.01>(0.45)^6=0.0083$ ולכן ה-n הראשון הוא $n=6$.

חלק ב

בחלק זה השאלות לא חיבות להיות דומות לאף שאלה שהכרנו, אם כי הן קשורות כמובן לחומר שלמדנו.

שאלה 6

שאלה זו תורגלה בשעור התרגיל בלבד.

נתונה המשואה $x^5+7x^3-20=0$ ורוצים למצוא לה שרש בשיטת ניוטון רפסון. למדת בתרגול משפט המבטיח התכנסות.

א. מצא תחום שיקים את תנאי המשפט.

תשובה:

ב. מצא n טבעי שעבורו השגיאה $|x_n-d|$ תקטן מ-0.001, כאשר d הוא הגבול של הסדרה ו-$x_0=b$.

ג. חשב את d עד דיוק של אלפית.

תשובה:

תשובה לשאלה 6.

א. קודם כל צריך למצוא a,b כך ש-$f(a)<0<f(b)$. רואים כי $f(1)=-12<0<f(2)=68$. כעת צריך למצוא קטע שבו f',f'' חיוביות. $f'=5x^4+21x^2$ והיא חיובית בתחום. $f''=20x^3+42x$ והיא חיובית בתחום.

ב. עבור חלק זה יש למצוא את המקסימום של הנגזרת שניה ואת המינימום של הנגזרת הראשונה בקטע. כיון שהן חיוביות נובע כי הן בקצוות, ולכן M , מקסימום f'' הוא 244 ו-m , מינימום f' הוא 26 .

ונקבל כי

$|x_{n+1}-d|<M(x_{n+1}-x_n)^2/2m=244(x_{n+1}-x_n)^2/26\sim 9.384(x_{n+1}-x_n)^2$

ולכן

$9.384(x_{n+1}-x_n)^2<0.001\rightarrow(x_{n+1}-x_n)^2<1/9384\rightarrow|x_{n+1}-x_n|<1/96.87\rightarrow 1/|x_{n+1}-x_n|>0.01032$

כלומר יש להתמיד בסדרה עד שערך המוחלט של המרחק בין איברים עוקבים יקים את אי השויון.

וכעת: $x0=2,$
$x_1=65/41\sim 1.585, x_2=13421311270/9774393850\sim 1.37310,$
$x_3\sim 1.320754,\ x_4\sim 1.3179320,\ x_5\sim 1.3179241,$

כיון ש- $|x_5-x_4|<1/96.87$ הרי ש $n=5$ ו- $d=1.3179$.

שאלה 7

מהו מספר הפעמים שמשתמשים במשפט רול, בהוכחת נוסחת השארית של פולינום האינטרפולציה?

לפונקציה המסובכת יש $n+2$ נקודות התאפסות שונות, שאותן נסדר ב-$n+1$ זוגות, ועל כל זוג נפעיל את משפט רול, כלומר $n+1$ פעמים. בשלב הבא n

פעמים, וכל נגזרת פעם פחות, עד שנקבל מספר פעמים שהוא סכום של סדרה חשבונית, אשר האבר הראשון בה הוא 1 והאחרון הוא $n+1$ ולכן נקבל $(n+1)n/2$ פעמים.

שאלה 8

נניח כי f,g הן פונקציות בעלות קדומות אלמנטריות G,F (כלומר $F'=f,G'=g$). האם להרכבה של g על f יש קדומה אלמנטרית?

תשובה: לאו דוקא. הקדומה של $f=x^2$ היא הפונקציה האלמנטרית $F=x^3/3$, הקדומה של $g=e^x$ הינה עצמה $G=g$ שהיא פונקציה אלמנטרית, אבל ההרכבה היא פונקציה חסרת קדומה אלמנטרית.