המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתו.</u>

מועד ב, יום ב, יב ניסן התשס"ט 6-4-2009

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 8 שאלות.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 14 נקודות.
- שאלה 6 שאלה חשובית בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 7 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 8 היא שאלות הבנה המבוססת על כל החומר שלמדנו. משקלה 10 נקודות.

14*5+3*10=70+30=100

בהצלחה.

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{125+bx}$ x משתנה, $0\le b$ פרמטר.

א. חזור על תהליך הערכת השגיאה כפי שעשינו בכתה, והחלט עבור אלו ערכים של b, טור טיילור מתכנס בקטע [0,0.1].

ב. מהו b המקסימלי מבין אלו שמצאת בסעיף א?

ג. עבור d=b/2 , כאשר את b מצאת בסעיף ב, מצא מהו n שיבטיח כי המרחק שבין פולינום טיילור מסדר n ובין הפונקציה המקורית קטן מ-0.01.

ד. עבור d זה, כתוב את הפולינום.

ה. חשב את השרש בקרוב של 0.01 עבור d שמצאת בסעיף ג ו-x=0.1.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+17x}, 0\le x\le 1$

א. נניח כי נתונות נקודות $0 = a_0 < a_1 < .... < a_{n-1} < a_n = 1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_{-0.5}^{0} \frac{e^x}{x+1} dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפונקציה $f(x)=x^3-27$ בקטע $[a_0=1,b_0=4]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך:

א. כתוב את כל שלשת הקטעים הראשונים.
ב. כמה שלבים יש להשתמש בשיטה עד שהמרחק b_n-a_n יהיה קטן מ-0.01?

שאלה חמישית

הבט בפונקציה $f(x)=x^3-27$ וב- $x_0=2$. השתמש בשיטת ניוטון רפסון וחשב שלשה שלבים במחברתך:

ג. כתוב את x_3, x_2, x_1 .
ד. כמה שלבים יש להשתמש בשיטה עד שהמרחק שבין x_n ובין הפתרון הנכון יהיה קטן מ-0.01?

שאלה שישית

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. א. חשב את $\|A\|_\infty$. ב. מצא וקטור v כך

ש- $\|A(v)\|_\infty = \|A\|_\infty$.

שאלה שביעית

נתונה פרבולת אינטרפולציה אשר עוברת בנקודות

$$(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), (b, f(b)).$$

הוכח מהו השטח שהיא כולאת בין a ל-b.

שאלה שמינית

א. נסח משפט שהוא שלוב בין משפט טיילור ובין משפט הקיום והיחידות של פולינום האינטרפולציה, ואשר מבטיח שחזור פונקציה ונגזרותיה בכמה נקודות.

ב. תן דוגמא של פונקציה f, ושל פולינום המשחזר אותה במובן הזה.

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i}(x - a_j)}{\prod_{j \ne i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n:

$$SR=h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h)+f(b)), h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n|\le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר M=supf", m=inf f' בקטע [a,b] שבו f(a)f(b)<0 וגם f',f">0.

תשובות

תשובה ראשונה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x)=\sqrt[3]{125+bx}=(125+bx)^{1/3},\ f'(x)=\frac{b(125+bx)^{-2/3}}{3},\ f''(x)=\frac{(-2)b^2(125+bx)^{-5/3}}{3^2},$$

$$\ldots..,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-4))b^n(125+bx)^{-(3n-1)/3}}{3^n}.$$

$$R(n)=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-1))b^{n+1}h^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)![\sqrt[3]{125+bc}]^{3n+2}}$$

ולכן:

$$|R(n)|=\frac{2*5..*(3n-1)b^{n+1}h^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)![\sqrt[3]{125+bc}]^{3n+2}}=$$

$$=\frac{2}{3*1}\frac{5}{3*2}\ldots\frac{3n-1}{3*n}\frac{b^{n+1}h^{n+1}}{3(n+1)[\sqrt[3]{125+bc}]^{3n+2}}\le 1*\frac{b^{n+1}h^{n+1}}{3(n+1)[\sqrt[3]{125+b*0}]^{3n+2}}=$$

$$=\frac{b^{n+1}0.1^{n+1}}{3(n+1)5^{3n+2}}=\frac{5*b^{n+1}}{3(n+1)10^{n+1}5^{3n+3}}=(\frac{b}{1250})^{n+1}\frac{5}{3(n+1)}$$

ולכן הטור יתכנס עבור 0≤b≤1250

נציב d=625 ונקבל $|R(n)|\le(\frac{625}{1250})^{n+1}\frac{5}{3(n+1)}=\frac{5}{3(n+1)2^{n+1}}$. נציב

ערכים של n ונראה כי עבור 5≤n החסם קטן מ-0.01.

נחשב את הפולינום הזה:

$$\sqrt[3]{125+625x}=\sqrt[3]{125(1+5x)}=5\sqrt[3]{1+5x}\approx 5[(1+5*0)^{1/3}+\frac{5(1+5*0)^{-2/3}h}{3}+$$

$$+\frac{(-2)25(1+d*0)^{-5/3}h^2}{3^2*2!}+\frac{10*125(1+5*0)^{-8/3}h^3}{3^3*3!}+\frac{(-80)*625(1+5*0)^{-11/3}h^4}{3^4*4!}+$$

$$+\frac{(880)*3125(1+5*0)^{-14/3}h^5}{3^5*5!}]=5[1+\frac{5h}{3}-\frac{25h^2}{9}+\frac{625h^3}{81}-\frac{6250h^4}{243}+\frac{68750h^5}{729}]=$$

$$=5+\frac{25}{3}h-\frac{125h^2}{9}+\frac{3125h^3}{81}-\frac{31250h^4}{243}+\frac{343750h^5}{729}$$

ולבסוף נציב x=h=0.1 ונקבל:

$$5\sqrt[3]{1+5*0.1}\approx 5+\frac{25}{3}0.1-\frac{125*0.1^2}{9}+\frac{3125*0.1^3}{81}-\frac{31250*0.1^4}{243}+\frac{343750*0.1^5}{729}=$$

$$=5+\frac{5}{6}-\frac{5}{36}+\frac{25}{648}-\frac{25}{1944}+\frac{55}{11664}=\frac{58320+9720-1620+450-150+55}{11664}$$

$$=\frac{66775}{11664}=5.72487997.$$

נשוה עם המחשבון

$$5\sqrt[3]{1.5}\approx 5.7235712, R=0.0013087<0.01$$

תשובה שניה

כפי שעשינו בכתה:

$$f(x)=\sqrt[3]{64+17x},\ f'(x)=\frac{17(64+17x)^{-2/3}}{3},$$

$$f''(x)=\frac{(-2)17^2(64+17x)^{-5/3}}{3^2},.....,$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-4))17^n(64+17x)^{-(3n-1)/3}}{3^n}.$$

$$R(n)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{(-2)(-5)..(-(3n-1))17^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{64+17c}^{3n+2}}$$

ולכן

$$|R(n)|=\frac{|(-2)(-5)..(-(3n-1))|17^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{64+17c}^{3n+2}}=$$

$$=\frac{2}{3*1}\frac{5}{3*2}...\frac{3n-1}{3*n}\frac{17^{n+1}(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)}{3(n+1)\sqrt[3]{64+17c}^{3n+2}}\le$$

$$1*\frac{17^{n+1}1*1*...*1}{3(n+1)\sqrt[3]{64+17*0}^{3n+2}}\le\frac{17^{n+1}}{3(n+1)4^{3n+2}}=$$

$$=\frac{4*17^{n+1}}{3(n+1)4^{3n+3}}=\frac{4}{3(n+1)}\frac{17^{n+1}}{4^{3n+3}}=\frac{4}{3(n+1)}(\frac{17}{64})^{n+1}$$

$$\le\frac{4}{3(n+1)}(\frac{21.333}{64})^{n+1}\le\frac{4}{3(n+1)}(\frac{1}{3})^{n+1}.$$

ולכן:

$$|R(n)| \le \frac{4}{3(n+1)}\frac{1^{n+1}}{3^{n+1}} < \frac{1}{1000} \to \frac{4000}{3} < (n+1)3^{n+1}$$

כיון שהבטוי האחרון הוא פונקציה עולה של n מספיק לבדוק על ידי הצבה מהו ה-n הראשון שבו הוא עובר את 4000/3. נציב ונראה כי n=5 הוא הראשון.

תשובה שלישית

תשובה בדרך ראשונה:

$$\int_{-0.5}^{0} \frac{e^x}{x+1}dx = \int_{-0.5}^{0} \frac{e^{x+1-1}}{x+1}dx = \frac{1}{e}\int_{-0.5}^{0} \frac{e^{x+1}}{x+1}dx.u = x+1, du = dx, I = \frac{1}{e}\int_{0.5}^{1} \frac{e^u}{u}du$$

כלומר התרגיל במבחן הזה הוא כמו התרגיל במבחן של מועד א, מחולק במספר של אוילר. לכן נשתמש בהערכה של התרגיל ההוא בצורה מעודכנת:

$$\frac{1}{e}\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4} \le \frac{1}{e}\frac{466\sqrt{e}(1-0.5)^5}{180n^4} = \frac{1}{e}\frac{233\sqrt{e}}{2880n^4} < \frac{1}{1000} \to$$

$$\frac{1}{e}133.386 = 49.0750551 < n^4 \to 2.646763 < n \to 4 \le n \to 2 \le m$$

תשובה בדרך שניה:

יש להעריך את הנגזרת הרביעית של f. נגזור ונקבל:

$$f=\frac{e^x}{x+1},\ f'=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{e^x((x+1)-1)}{(x+1)^2},\ f''=\frac{[e^x((x+1)-1)+e^x](x+1)^2-2(x+1)e^x((x+1)-1)}{(x+1)^4}=\frac{e^x((x+1)^2-2(x+1)+2)}{(x+1)^3}.$$

$$f'''=\frac{[e^x((x+1)^2-2(x+1)+2)+(2(x+1)-2)](x+1)^3-3(x+1)^2(e^x((x+1)^2-2(x+1)+2))}{(x+1)^6}=\frac{e^x((x+1)^3-3(x+1)^2+6(x+1)-6)}{x^4}.$$

$$f''''=\frac{(x+1)^4[e^x(((x+1)^3-3(x+1)^2+6(x+1)-6)+(3(x+1)^2-6(x+1)+6))]-4(x+1)^3e^x((x+1)^3-3(x+1)^2+6(x+1)-6)}{(x+1)^8}.$$

$$f''''=\frac{e^x((x+1)^4-4(x+1)^3+12(x+1)^2-24(x+1)+24)}{(x+1)^5}.$$

כדי לחסום את הנגזרת הרביעית יש לחקור אותה, כלומר לחשב את הנגזרת החמישית. קל לראות באינדוקציה כי:

$$f'''''=\frac{e^x((x+1)^5-5(x+1)^4+20(x+1)^3-60(x+1)^2+120(x+1)-120)}{(x+1)^6}$$

נציג את הנגזרת החמישית בצורה:

$$\frac{e^x((x+1)^5-5(x+1)^4+20(x+1)^3-60(x+1)^2+120(x+1)-120)}{x^6}=$$
$$=\frac{e^x((x+1)^4(x+1-5)+20(x+1)^2((x+1)-3)+120((x+1)-1))}{(x+1)^6}$$

ובטוי זה הוא שלילי כי כל אחד מהסוגרים שבמונה שלילי בתחום $x<0$. לכן הנגזרת החמישית שלילית בתחום, ולכן הנגזרת הרביעית יורדת בתחום.

נציג את הנגזרת הרביעית בצורה:

$$f''''=\frac{e^x((x+1)^4-4(x+1)^3+12(x+1)^2-24(x+1)+24)}{(x+1)^5}=$$
$$=\frac{e^x((x+1)^4+4(x+1)^2(3-(x+1))+24(1-(x+1)))}{x^5}$$

ולכן, כיון שכל סוגר במונה חיובי בתחום שלנו, הנגזרת הרביעית חיובית ויורדת ולכן ערכה המוחלט הגדול ביותר הוא בשמאל הקטע, כלומר אפשר להציב בה x=-0.5 ולקבל חסם עבור ערכה המוחלט:

$$f'''' = \frac{e^x((x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 12(x+1)^2 - 24(x+1) + 24)}{(x+1)^5}, \ f''''(-0.5) = \frac{e^{-0.5}(1/16 - 1/2 + 3 - 12 + 24)}{1/32} =$$

$$= (\sqrt{e})^{-1}(2 - 16 + 480) = \frac{1}{e}466\sqrt{e} = \frac{1}{e}768.304 = 283.21439$$

ערך זה נציב בנוסחת הערכת השגיאה ונקבל:

$$\frac{f''''(c)(b-a)^5}{e180n^4} \le \frac{466\sqrt{e}(1-0.5)^5}{e180n^4} = \frac{233\sqrt{e}}{e2880n^4} < \frac{1}{1000} \rightarrow$$

$$\frac{1}{e}133.386 < n^4 \rightarrow 49.0750551 < n^4 \rightarrow 2.646763 < n \rightarrow 4 \le n \rightarrow 2 \le m$$

תשובה רביעית

א.נחשב ונקבל:

$$f(x) = x^3 - 27, [a_0 = 1, b_0 = 4] \rightarrow c = 2.5, \ f(c) < 0, [a_1 = 2.5, b_1 = 4] \rightarrow c = 3.25,$$
$$f(c) > 0, [a_2 = 2.5, b_2 = 3.25] \rightarrow c = 2.875, \ f(c) < 0, [a_3 = 2.875, b_3 = 3.25] \rightarrow$$
$$c = 3.0625, \ f(c) > 0, [a_4 = 2.875, b_4 = 3.0625].$$

ב.

$$b_0 - a_0 = 3, b_n - a_n = \frac{3}{2^n} < 0.01 \to 300 < 2^n \to 9 < n$$

תשובה חמישית

$$f(x) = x^3 - 27, g(x) = x - \frac{x^3 - 27}{3x^2} = \frac{2x^3 + 27}{3x^2},$$
$$x_0 = 2, x_1 = \frac{43}{12} = 3.5833, x_2 = \frac{102835}{33282} = 3.089808, x_3 = 3.002585.$$

ורואים כי האבר השלישי כבר קרוב לתשובה הנכונה בפחות משלוש אלפיות שקטן ממאית.

תשובה שישית

לפי טענה בספר יש לעבור שורה שורה של A ולסכם את הערכים המוחלטים של האיברים בכל שורה, ואז לקחת את המכסימלי. עבור השורה הראשונה יוצא 6, שניה 15 ושלישית 24 , ולכן המכסימום שהוא גם הנורמה הוא 24. נביט בוקטור (1,1,-1-). נורמת המקסימום שלו היא 1, ומכפלת A בו יוצאת 24, כמו הנורמה.

תשובה שמינית

א.נתונות $n+1$ נקודות $a_0<a_1<\ldots<a_n$ ונתונה פונקציה f גזירה מסדר m בקטע פתוח המכיל את הקטע $[a_0,a_n]$. אז קיימת פונקציה g אשר יש לה פולינום טיילור הזהה לזה של f מסדר m סביב כל אחת מהנקודות הנתונות.

ב.נביט על $f=0$ ועל $g=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$. אז $f=g$ בנקודות $1,-1$, ובאותן נקודות גם מתקיים $f'=g'$, ולכן לשתי הפונקציות אותו פולינום טיילור עד סדר 1.