<u>מבחן מועד ב באנליזה נומרית</u>
<u>יום ה, ט אדר התשס"ו 9-3-2006</u>

- מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.
- מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- יש לחשב את כל החשובים או בשבר רגיל או שבר עשרוני עם שתי ספרות עשרוניות.

בהצלחה.

<u>שאלה 1.(36 נקודות)</u>
שאלה זו עוסקת בשיטת ניוטון רפסון.
<u>חלק ראשון- 16 נקודות</u>
הבט על $f(x)=xe^x$ ו $x_0=1$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

$$g=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{xe^x}{xe^x+e^x}=x-\frac{x}{x+1}=\frac{x^2+x-x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$$

א. $x_1=1/2$

ב. $x_2=1/6$

ג. $x_3=1/42$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=1$, $e_1=1/2$, $e_2=1/6$, $e_3=1/42$

ה. חשב את $e_1/e_0=1/2$, $e_2/e_1=1/3$, $e_3/e_2=1/7$

ו. לאיזה ערך הסדרה e_{n+1}/e_n מתכנסת? תשובה: 0

ז. חשב את $e_1/(e_0)^2=1/2$, $e_2/(e_1)^2=2/3$, $e_3/(e_2)^2=36/42=6/7$

ח. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/(e_n)^2$ מתכנסת?
תשובה:

$$\frac{g''(x)}{2}=\frac{f''(x)}{2f'(x)}=\frac{xe^x+2e^x}{2(xe^x+e^x)}=\frac{x+2}{2(x+1)},p=0\rightarrow\frac{g''(p)}{2}=1$$

<u>חלק שני-10 נקודות</u>
נתונה המשואה $x^3-3x^2+2x+1=0$.

ט. מצא קטע שבו למשואה יש שרש p. תשובה:

הצב את הקצה השמאלי של הקטע שמצאת בסעיף הקודם בתור x_0 , והשתמש בשיטת ניוטון רפסון לחשובים הבאים:

י. חשב את x_1: תשובה

יא. חשב את x_2: תשובה

יב. חשב את x_3: תשובה

יג. הערך את מרחק x_3 מהשורש p שעליו דברנו בסעיף ט. תשובה

תשובות לחלק שני. ט. קל לראות כי $f(-1)=-5<0<f(0)=1$ ולכן יש שרש בקטע $[-1,0]$. נחשב את g של ניוטון רפסון:

$g=x-(f(x)/f'(x))=x-(x^3-3x^2+2x+1)/(3x^2-6x+2)$. לכן : $g=(2x^3-3x^2-1)/(3x^2-6x+2)$. נציב $x_0=-1$ ונקבל:

י. $x_1=-6/11=-0.54545$

יא. $x_2=-2951/8206=-0.3596$

יב. $x_3=-0.3435150$

יג. נחשב את הנגזרות. $f'=3x^2-6x+2, f''=6x-6$. $f''(-1)=-12, f''(0)=-6$. לכן f'' שלילית בקטע, ולכן f' יורדת בקטע, וכיון ש- $f'(-1)=11, f'(0)=2$ נובע כי $Supf''=12, Inff'=2$ ולכן

$|x_3-x_0|\leq 12(x_3-x_2)^2/2\cdot 2=12(0.0165)^2/4=0.00081675$

<u>חלק שלישי(10 נקודות)</u>

נביט על $f(x)=(\ln(x))^2=\ln(x)\ln(x)$. מצא לה שורש, ועבור כל x_0 קרוב לשורש הגדר את הסדרה x_n על ידי נוסחת ניוטון רפסון עבור f זו. מצא לאיזה ערך שואפת סדרת מנות ההפרשים e_{n+1}/e_n?

תשובה: כיון ש- $f'(x)=2\ln(x)/x$ ו-$f'(1)=0$ הרי שמתאוריה הרגילה של שיטת ניוטון רפסון משתנה. אז

$$g = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\ln(x)\ln(x)}{2\ln(x)/x} = x - \frac{x\ln(x)}{2} = \frac{2x - x\ln(x)}{2} = \frac{x(2-\ln(x))}{2}$$

וכמו כן:

$$g = \frac{x(2-\ln(x))}{2}, p = 1, g' = 0.5(2-\ln(x)-1) = \frac{1-\ln(x)}{2}, g'(1) = \frac{1}{2}$$

ולכן הסדרה e_{n+1}/e_n שואפת ל-1/2 במקום ל-0.

<u>שאלה 2 (22 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת בשיטת נקודות השבת הכללית. בכל 360 מעלות יש 2Π רדיאנים.

<u>חלק ראשון-12 נקודות</u>

הבט במשוואה $g(x)=\sin(x)$ הצב $x_0=1$ ברדיאנים וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$.

א. $x_1=$

ב. $x_2=$

ג. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_3=$, $e_2=$, $e_1=$, $e_0=$

ה. חשב את $e_3/e_2=$, $e_2/e_1=$, $e_1/e_0=$

ו. לאיזה ערך הסדרה e_{n+1}/e_n מתכנסת? תשובה:

תשובות לחלק א'

א. תשובה: $x_1=0.84147$

ב. $x_2=0.74562$

ג. $x_2=0.67843$

ד. $e0=1, e1=0.84147$, $e2=0.74562$, $e3=0.67843$

ה. $e1/e0=0.84147$, $e2/e1=0.88609$, $e3/e2=0.90988$

ו. תשובה: $\cos(0)=1$

חלק שני-10 נקודות

נתונה המשואה $x^3-18x^2+107x-209=0$.

ז. מצא קטע שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ח. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ט. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ח תהיה נקודת שבת. תשובה:

י. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

יא. מצא n כך שהחסם שמצאת יהיה קטן מ-0.01 . תשובה:

תשובות לחלק ב

ז. קל לראות כי $f(4)=-5<0<f(5)=1$ ולכן יש שרש בקטע [4,5] .

ח. נשאיר את 107x בצד אחד, נעביר את כל שאר המחוברים לצד שני ונקבל: $g(x)=[209+18x^2-x^3]/107$.

ט. נחשב את הנגזרת $g'(x)=(36x-3x^2)/107=3x(12-x)/107$. נשים לב כי $g'(4)=96/107, g'(5)=105/107$ כלומר בקטע זה $M=105/107=0.923$. עוד נשים לב כי $g(4)=433/107=4.046, g(5)=534/107=4.9906$ כלומר מתקיימים תנאי המשפט.

י. $|En|\leq(105/107)^n(1-0)$. יא. נשים לב כי $(105/107)^{122}<0.01<(105/107)^{123}$. לכן ה-n הראשון הוא n=123 .

<u>שאלה 3(22 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת באינטגרציה נומרית.

<u>חלק ראשון -22 נקודות</u>

א. 14 נקודות.

חשב את סכום הטרפזים המבוסס על n קטעים שוים של x^4 על הקטע -[1,4].

ב 2 נקודות . חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום הטרפז.

תשובה:

ג 2 נקודות. מצא N כך שעבור n>N מתקים כי השגיאה שבסעיף הקודם קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

ד 2 נקודות. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום הטרפז, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

יא 2 נקודות.מצא N כך שעבור n>N מתקים כי החסם שבסעיף הקודם קטן מ-0.001 .

תשובה:
N=

$$\frac{-a}{n}=\frac{4-(-1)}{n}=\frac{5}{n},ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))=$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1+k\,{}^{5}\!/\!_{n})^4+256)=\frac{5}{2n}+\frac{5}{n}(\sum_{k=1}^{n-1}(1+4(-1)\frac{5k}{n}+6\frac{25k^2}{n^2}+$$

$$)\frac{125k^3}{n^3}+\frac{625k^4}{n^4})+\frac{640}{n}=\frac{5}{2n}+\frac{5(n-1)}{n}-\frac{100}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}+$$

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{2500}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}+\frac{3125}{n^5}\frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}+\frac{640}{n}$$

ולכן:

$$ST=\frac{5}{2n}+\frac{5(n-1)}{n}-\frac{100}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}+\frac{750}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$-\frac{2500}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}+\frac{3175}{n^5}\frac{(n-1)n(3n^2-3n-1)}{30}+\frac{640}{n}$$

$$=\frac{5}{2n}+\frac{5(n-1)}{n}-\frac{50(n-1)}{n}+\frac{125(n-1)(2n-1)}{n^2}-\frac{625(n-1)^2}{n^2}$$

$$+\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}+\frac{640}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$0+5-50+250-625+625+0=205=\int_{-1}^{4}x^4dx$$

תשובות:

א. $\frac{5}{2n}$, ב. $\frac{5(n-1)}{n}$, ג. $\frac{-50(n-1)}{n}$, ד. $\frac{125(n-1)(2n-1)}{n^2}$, ה. $-\frac{625(n-1)^2}{n^2}$,

ו. $\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{36n^4}$, ז. $\frac{640}{n}$

נמשיך:

$$ST=\frac{5}{2n}+\frac{5(n-1)}{n}-\frac{50(n-1)}{n}+$$
$$\frac{125(n-1)(2n-1)}{n^2}-\frac{625(n-1)^2}{n^2}+$$
$$\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}+\frac{640}{n}=$$
$$=[\frac{1285}{2n}-\frac{45(n-1)}{n}$$
$$+\frac{125(n-1)(2n-1)-625(n-1)^2}{n^2}$$
$$+\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}=$$
$$=\frac{1285}{2n}-\frac{45(n-1)}{n}+\frac{125(n-1)[(2n-1)-5(n-1)]}{n^2}$$
$$+\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}$$

ולכן:

$$ST=\frac{1285}{2n}-\frac{45(n-1)}{n}+\frac{125(n-1)[(2n-1)-5(n-1)]}{n^2}$$
$$+\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}=$$
$$\frac{1285}{2n}-\frac{45(n-1)}{n}+\frac{125(n-1)(4-3n)}{n^2}$$
$$+\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{}0-45-375+625=205$$

ולכן:

$$E=ST-\int_{-1}^{4}x^4dx=\frac{1285}{2n}-\frac{45(n-1)}{n}+\frac{125(n-1)(4-3n)}{n^2}$$

$$+\frac{625(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}-[0-45-375+625]=$$

$$=\frac{1285}{2n}+45[1-\frac{(n-1)}{n}]+125[3+\frac{(n-1)(4-3n)}{n^2}]+$$

$$625[\frac{(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{6n^4}-1]=\frac{1285}{2n}+\frac{45}{n}+$$

$$+125[\frac{3n^2+(-3n^2+7n-4)}{n^2}]+$$

$$+625[\frac{(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)-6n^4}{6n^4}]=\frac{1375}{2n}+$$

$$+125(\frac{7n-4}{n^2})+625(\frac{-15n^3+10n^2+1}{6n^4})=$$

$$=\frac{4125n^3+5250n^3-3000n^2-9375n^3+6250n^2+625}{6n^4}=$$

$$=\frac{3250n^2+625}{6n^4}=\frac{125(26n^2+5)}{6n^4}\le\frac{125(26n^2+n^2)}{6n^4}=\frac{3375n^2}{6n^4}$$

$$=\frac{1125}{2n^2}$$

ח. $\frac{1125}{2n^2}$ ט. $\frac{1125}{2n^2}<0.001\rightarrow 562500<n^2\rightarrow 750<n$ י.

$$E=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}=\frac{12c^2(4-(-1))^3}{12n^2}=\frac{c^2125}{n^2}\le\frac{16\cdot125}{n^2}=\frac{2000}{n^2}$$

יא. $\frac{2000}{n^2}<0.001\rightarrow 2000000<n^2\rightarrow 1414.21<n$.

<u>שאלה 4(10 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת באינטרפולציה נומרית.

נתונות שתי נקודות a,b בתחום של הפונקציה f. השתמש בנתונים $f(a), f'(a), f(b)$ ובנה פונקציה g אשר משחזרת את f ואשר מקימת את התכונות: $g(a) = f(a), g'(a) = f'(a), g(b) = f(b)$.

תשובה:

נביט בפולינום האינטרפולציה הרגיל $p = \frac{f(a)(x-b) - f(b)(x-a)}{a-b}$ אשר מקים את הדרישות הרגילות p(a)=f(a),p(b)=f(b), אבל $p' = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}$ ומטרתנו לשנות תכונה זו. נוסיף ל-p את הפולינום k(x-a)(x-b) שתכונותיו כי הוא מתאפס בx=a,b כלומר לא משנה את התכונות הטובות של p אך יש לו נגזרת שונה מ-0, ונציג לנוחיות את הקבוע k כאילו הוא שוה c/(a-b)

ונקבל:
$$g = \frac{f(a)(x-b) - f(b)(x-a) + c(x-a)(x-b)}{a-b}, g(a) = f(a), g(b) = f(b)$$

כלומר התכונות הטובות של p נשארו ב-g וכעת נביט על הנגזרות:
$$g' = \frac{f(a) - f(b) + c(2x-a-b)}{a-b}, g'(a) = \frac{f(a) - f(b) + c(a-b)}{a-b} = f'(a) \rightarrow$$
$$c = f'(a) - \frac{f(a) - f(b)}{a-b}$$

ולכן הפונקציה הרצויה היא

$$g = \frac{f(a)(x-b) - f(b)(x-a) + [f'(a) - {(f(a) - f(b))}/{a-b}](x-a)(x-b)}{a-b}$$

<u>שאלה 5(10 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת בנגזרות מסדר גבוה.

מצא את הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה $f(x)=x^2e^x$.

תשובה:

$$f(x) = x^2 e^x \to f'(x) = x^2 e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x)e^x \to$$
$$f''(x) = (x^2 + 2x + 2x + 2)e^x = (x^4 + 4x + 2)e^x$$

נניח כי

$$f^n(x) = (x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x \to f^{n+1}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x + (2x + 2n)e^x \to$$
$$f^{n+1}(x) = (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))e^x$$

נניח באינדוקציה כי $f^n(x) = (x+n)e^x$ ונוכיח כי $f^{n+1}(x) = (x+n+1)e^x$ ואכן:

$$f^n(x) = (x+n)e^x \to f^{n+1}(x) = f^n(x) + e^x = (x+n+1)e^x$$

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4 = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$,
$M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$$|x_{n+1} - L| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר M=supf'', m=inf f' בקטע [a,b] שבו f(a)f(b)<0 .