NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. מבוא לאנליזה נומרית מועד ב התשס"ז. יום ה, א איר התשסז 19-4-2007

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן במחברות.

במבחן 5 שאלות.

3 השאלות הראשונות הן חשוביות ומשקל כל סעיף בהן הוא 4 נקודות.

שאלה 4 היא שאלת הוכחה ומשקלה 17 נקודות.

שאלה 5 היא מיוחדת ומשקלה 15 נקודות. סה"כ $17\cdot4+17+15=100$.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

<u>שאלה 1. (36 נקודות)</u> (כל סעיף בעל משקל של 4 נקודות)

הבט באינטגרל $\int_a^b (x^3-5x)dx$

א. חשב את האינטגרל.

ב. חשב את סכום רימן עבור האינטגרל המבוסס על n קטעים שוים.

ג. חשב את הגבול של סכום רימן מסעיף ב כאשר n שואף ל-∞.

ד. חשב את ההפרש האמיתי בין הגבול ובין הסדרה.

ה. הצב a>0, b=2a בחשוב של הסעיף הקודם.

ו. מצא תנאי על n שיבטיח כי ההפרש של הסעיף הקודם קטן מ-ε

ז. לסעיף זה משקל של 12 נקודות:

הבט באינטגרל $\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\cos x}{x} dx$

מצא M כך שעבור n>M מתקיים כי סכום הטרפזים עבור האינטגרל קרוב לאינטגרל בקרוב של ε.

<u>שאלה 2. (20 נקודות)</u>

הבט בפונקציה **g(x)=√x.**

א. מצא את נקודות השבת של g ועבור כל נקודת שבת מצא האם x_0 קרוב מספיק יגרם לסדרה להתכנס לאותה נקודת שבת.

ב. הצב $x_0=1/65536$ ומצא את x_1,x_2,x_3,x_4 ואת p נקודת השבת שאליה הסדרה מתכנסת.

ג. חשב את e_0,e_1,e_2,e_3,e_4 עבור $e_i=x_i-p$ עבור p מהסעיף הקודם, ואת המנות e_{i+1}/e_i עבור 0□i□3.

ד. מהו $\lim e_{i+1}/e_i$?

<u>שאלה 3. (12 נקודות)</u>

הבט במשואה $x^4+18x^3+119x^2-342x+1=0$.

א. מצא תחום $[a,b]$ שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח כי סדרת ניוטון רפסון מתכנסת לגבול יחיד.

ב. חשב שלשה איברים בסדרה המתכנסת לשרש.

ג. הערך את $|x_3-s|$ כאשר s הוא השרש המבוקש.

<u>שאלה 4. (17 נקודות)</u>

נסח והוכח את משפט הקיום והיחידות של פולינום האינטרפולציה, כולל טענת העזר.

<u>שאלה5. (15 נקודות)</u>

נתונה פונקציה f המוגדרת בקטע $[a,b]$.

א. בטא את סכום רימן כללי (לכל פונקציה) המבוסס על n קטעים שוים, שבהם נקודות הבינים הן באמצעי הקטעים.

ב. מצא נוסחת הערכת שגיאה כללית עבור הבטוי בסעיף הקודם.

ג. חשב את הסכום של סעיף א עבור $f=x^2$ בקטע [a,b].

ד. השתמש בבטוי של סעיף ב כדי להעריך את השגיאה של האינטגרל מהסעיף הקודם.

ה. מצא תנאי על n שיבטיח כי השגיאה מהסעיף הקודם קטנה מ-ε.

תשובות

1.א

$$\int_a^b (x^3-5x)dx = \left.\frac{x^4}{4}-\frac{5x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^4-a^4}{4}-5\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{4}[a^2+b^2-10].$$

ב

$$SR(n) = h\sum_{k=0}^{n-1}[(a+kh)^3-5(a+kh)] = h\sum_{k=0}^{n-1}[a^3+3a^2kh+3ak^2h^2+k^3h^3-5a-5kh] =$$

$$= ha^3\sum_{k=0}^{n-1}1+3h^2a^2\sum_{k=0}^{n-1}k+3h^3a\sum_{k=0}^{n-1}k^2+h^4\sum_{k=0}^{n-1}k^3-5ha\sum_{k=0}^{n-1}1-5h^2\sum_{k=0}^{n-1}k =$$

$$= h(a^3-5a)\sum_{k=0}^{n-1}1+h^2(3a^2-5)\sum_{k=0}^{n-1}k+3h^3a\sum_{k=0}^{n-1}k^2+h^4\sum_{k=0}^{n-1}k^3 =$$

$$= \frac{b-a}{n}(a^3-5a)n+\frac{(b-a)^2}{n^2}(3a^2-5)\frac{n(n-1)}{2}+3\frac{(b-a)^3}{n^3}a\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+$$

$$+\frac{(b-a)^4}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = (b-a)[a^3-5a+\frac{n-1}{2n}(3a^2-5)(b-a)+$$

$$+(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{4n^2}] =$$

$$= \frac{(b-a)}{4}[4a^3-20a+\frac{n-1}{n}(6a^2-10)(b-a)+$$

$$+4(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{n^2}]$$

ג.

$$\lim_{n\to\infty} SR(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)}{4}[4a^3-20a+\frac{n-1}{n}(6a^2-10)(b-a)+$$
$$+4(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{n^2}]=$$
$$=\frac{(b-a)}{4}[4a^3-20a+(6a^2-10)(b-a)+4(b-a)^2a+(b-a)^3]=$$
$$=\frac{(b-a)}{4}[4a^3-20a+6a^2b-6a^3-10b+10a+4b^2a-8ba^2+4a^3+b^3-3ab^2+3a^2b-a^3]=$$
$$=\frac{(b-a)}{4}[a^3+a^2b+ab^2+b^3-10a-10b]=\frac{(b-a)}{4}[(a+b)(a^2+b^2-10)]=\frac{(b^2-a^2)}{4}(a^2+b^2-10).$$

ד.

$$e(n)=\frac{(b-a)}{4}[4a^3-20a+(6a^2-10)(b-a)+4(b-a)^2a+(b-a)^3]-$$
$$\frac{(b-a)}{4}[4a^3-20a+\frac{n-1}{n}(6a^2-10)(b-a)+4(b-a)^2a\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}+(b-a)^3\frac{(n-1)^2}{n^2}]=$$
$$=\frac{(b-a)}{4}[\frac{1}{n}(6a^2-10)(b-a)+\frac{3n-1}{2n^2}4(b-a)^2a+\frac{2n-1}{n^2}(b-a)^3]=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[(6a^2-10)+\frac{6n-2}{n}(b-a)a+\frac{2n-1}{n}(b-a)^2]=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[a^2(6-\frac{6n-2}{n}+\frac{2n-1}{n})+ab(\frac{6n-2}{n}-\frac{4n-2}{n})+b^2\frac{2n-1}{n}-10]=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4n}[2(a^2+ab+b^2-5)+\frac{a^2-b^2}{n}].$$

ה.

$$e(n)=\frac{(2a-a)^2}{4n}[2(a^2+a2a+(2a)^2-5)+\frac{a^2-(2a)^2}{n}]=$$
$$=\frac{a^2}{4n}[2(7a^2-5)-\frac{3a^2}{n}]\le\frac{a^2}{4n}2(7a^2-5)\le\frac{a^2}{2n}(7a^2-5)$$

ו.

$$e(n)<\frac{a^2(7a^2-5)}{2n}<\varepsilon\to\frac{a^2(7a^2-5)}{2\varepsilon}<n$$

ז.

$$e=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4},\ f=\frac{\cos x}{x},\ f'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2},\ f''=\frac{x^2(-x\cos x-\sin x+\sin x)-2x(-x\sin x-\cos x)}{x^4}=$$

$$=\frac{2x^2\sin x+\cos x(-x^3+2x)}{x^4}=\frac{2x\sin x+\cos x(-x^2+2)}{x^3},$$

$$f'''=\frac{x^3[2x\cos x+2\sin x-\sin x(-x^2+2)-2x\cos x]-3x^2[2x\sin x+\cos x(-x^2+2)]}{x^6}=$$

$$=\frac{\sin x(-x^5-6x^3)+\cos x(3x^4-6x^2)}{x^6}=\frac{\sin x(-x^3-6x)+\cos x(3x^2-6)}{x^4}.$$

$$f''''=\frac{x^4[\cos x(-x^3-6x)+\sin x(-3x^2-6)-\sin x(3x^2-6)+\cos x(6x)]-4x^3[\sin x(-x^3-6x)+\cos x(3x^2-6)]}{x^8}=$$

$$f''''=\frac{x[\cos x(-x^3-6x)+\sin x(-3x^2-6)-\sin x(3x^2-6)+\cos x(6x)]-4[\sin x(-x^3-6x)+\cos x(3x^2-6)]}{x^5}=$$

$$\frac{x[-6x^2\sin x-x^3\cos x]-4[\sin x(-x^3-6x)+\cos x(3x^2-6)]}{x^5}=\frac{\sin x(-2x^3+24x)+\cos x(-x^4-12x^2+24)}{x^5}.$$

$$|f''''|\le\frac{|\sin x||(-2x^3+24x)|+|\cos x||(-x^4-12x^2+24)|}{x^5}\le$$

$$\frac{|(-2x^3+24x)|+|(-x^4-12x^2+24)|}{x^5}\le\frac{2x^3+24x+x^4+12x^2+24}{x^5}=\frac{x^4+2x^3+12x^2+24x+24}{x^5}=$$

$$=\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}+12\frac{1}{x^3}+24\frac{1}{x^4}+24\frac{1}{x^5}\le\frac{1}{(2\pi)}+2\frac{1}{(2\pi)^2}+12\frac{1}{(2\pi)^3}+24\frac{1}{(2\pi)^4}+24\frac{1}{(2\pi)^5}$$

ולכן עבור סכומי סימפסון:

$$e=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}\le[\frac{1}{(2\pi)}+2\frac{1}{(2\pi)^2}+12\frac{1}{(2\pi)^3}+24\frac{1}{(2\pi)^4}+24\frac{1}{(2\pi)^5}]\frac{(3\pi-2\pi)^5}{180n^4}=$$

$$=\frac{\pi^4}{2}+2\frac{\pi^3}{4}+12\frac{\pi^2}{8}+24\frac{\pi}{16}+24\frac{1}{32}]\frac{1}{180n^4}=\frac{1}{720n^4}[2\pi^4+2\pi^3+6\pi^2+6\pi+3]=337.89791775\frac{1}{720n^4}=$$

$$=\frac{0.46930}{n^4}\le\frac{1}{2n^4}<\varepsilon\to\frac{1}{2\varepsilon}<n^4\to\frac{1}{\sqrt[4]{2\varepsilon}}<n$$

ולכן עבור סכומי טרפז:

$$e=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}\le[\frac{2x\sin(x)+\cos(x)(2-x^2)}{x^3}]\frac{(3\pi-2\pi)^3}{12n^2}\le\frac{\pi^3}{12n^2}(\frac{2x\cdot 1+(x^2+2)\cdot 1}{x^3})\le$$
$$\frac{\pi^3}{12n^2}(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3})\le\frac{\pi^3}{12n^2}(\frac{1}{2\pi}+\frac{2}{(2\pi)^2}+\frac{2}{(2\pi)^3})=\frac{\pi^3}{12n^2}(\frac{(2\pi)^2+2(2\pi)+2}{(2\pi)^3})=$$
$$=\frac{1}{12n^2\cdot 8}2\cdot(2\pi^2+2\pi+1)=\frac{1}{48n^2}27.0023=\frac{0.56296}{n^2}\le\frac{1}{n^2}<\varepsilon\to\frac{1}{\varepsilon}<n^2\to\frac{1}{\sqrt[2]{\varepsilon}}<n$$

2. א

$$g(x)=\sqrt{x}\to g(p)=\sqrt{p}=p\to p^2-p=0\to p(p-1)=0\to p=0,1$$
$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}<1,g'(0)=\frac{1}{2\sqrt{0}}=\frac{1}{0}=\infty$$

לכן, עבור x_0 קרוב מספיק נקבל סדרה המתכנסת ל-1, אך לא נקבל סדרה המתכנסת ל-0.

ב.

$$x_0=2^{-16},x_1=2^{-8},x_2=2^{-4},x_3=2^{-2},x_4=2^{-1},p=1$$

ג.

$$e_i=x_i-1,e_0=x_0-1=2^{-16}-1=-0.99998474,e_1=x_1-1=2^{-8}-1=-0.99609375,$$
$$e_2=x_2-1=2^{-4}-1=-0.9375,e_3=x_3-1=2^{-2}-1=-0.75,e_4=x_4-1=2^{-1}-1=-0.5,$$
$$\frac{e_1}{e_0}=\frac{2^{-8}-1}{2^{-16}-1}=\frac{(2^{-8}-1)}{(2^{-8}-1)(2^{-8}+1)}=\frac{1}{2^{-8}+1},\frac{e_2}{e_1}=\frac{2^{-4}-1}{2^{-8}-1}=\frac{(2^{-4}-1)}{(2^{-4}-1)(2^{-4}+1)}=\frac{1}{2^{-4}+1},$$
$$\frac{e_3}{e_2}=\frac{2^{-2}-1}{2^{-4}-1}=\frac{(2^{-2}-1)}{(2^{-2}-1)(2^{-2}+1)}=\frac{1}{2^{-2}+1},\frac{e_4}{e_3}=\frac{2^{-1}-1}{2^{-2}-1}=\frac{(2^{-1}-1)}{(2^{-1}-1)(2^{-1}+1)}=\frac{1}{2^{-1}+1}$$

ד.

$$\lim \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{\lim x_n + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \lim \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}.$$

3. א.

$f(x)= x^4+18 x^3+119 x^2-342x+1$

$f'(x)=4x^3+54x^2+238 x-342$

$f''(x)=12x^2+108 x+238$

צריך קטע שבו f'' חיובית. נמצא את שרשי f''.

$$12x^2+108x+238 = 2(6x^2+54x+119). \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(54) \pm \sqrt{(54)^2 - 4\cdot 6\cdot 119}}{2\cdot 6} = \frac{-54 \pm \sqrt{2916-2856}}{12} =$$
$$= \frac{-54 \pm \sqrt{60}}{12} \approx \frac{-54 \pm 7.74}{12} = \frac{-46.26}{12}, \frac{-61.74}{12} = -3.853, -5.145$$

לכן נחפש קטע דרוש מחוץ לקטע שרשי f''.

$$f'(x) = 4x^3+54x^2+238x-342,\ f'(0) = -342 < 0,\ f'(1) = 4\cdot 1^3 + 54\cdot 1^2 + 238\cdot 1 - 342 < 0,$$
$$f'(2) = 4\cdot 2^3 + 54\cdot 2^2 + 238\cdot 2 - 342 > 0.$$

לכן, עבור $2 \le x$ מתקימים התנאים של f' ושל f'' וכעת נותר לבדק את התנאי אודות f עצמה.

$$f(x) = x^4+18x^3+119x^2-342x+1,\ f(2) = 16+144+476-684+1 < 0,\ f(3) = 81+486+1071-1026 > 0,$$
$$f'(2) = 4\cdot 2^3 + 54\cdot 2^2 + 238\cdot 2 - 342 > 0.$$

לכן בקטע [a=2,b=3] מתקיים כי f(a)<0<f(b) וכי f'',f'>0.
לכן בקטע זה מתקיימות כל ההנחות.

ב. נחשב את g.

$$g = x-\frac{f}{f'} = x-\frac{x^4+18x^3+119x^2-342x+1}{4x^3+54x^2+238x-342} = \frac{4x^4+54x^3+238x^2-342x-(x^4+18x^3+119x^2-342x+1)}{4x^3+54x^2+238x-342} =$$

$$= \frac{3x^4+36x^3+119x^2-1}{4x^3+54x^2+238x-342} = \frac{((3x+36)x+119)x^2-1}{((4x+54)x+238)x-342}.$$

כעת נציב $x_0=3$ ונקבל:

$$g = \frac{((3x+36)x+119)x^2-1}{((4x+54)x+238)x-342}, x_0=3, x_1=\frac{2376}{966}=\frac{396}{161}=2.4596, x_2=2.16710411, x_3=2.1159064786.$$

ג.

$$|x_3-L| \le \frac{M}{2m}(x_3-x_2)^2 \le \frac{M}{2m}(0.05)^2$$

מזכר כי f'' היא פרבולה שערכה המוחלט גדל ככל שמתרחקים משרשיה.
לכן f'' חסום על ידי

$$M = f''(3) = 12(3)^2+108\cdot(3)+238 = 670$$

לעומת זאת, f' עולה ולכן חסם מלרע שלה הוא

$$m = f'(2) = 4(2)^3+54(2)^2+238(2)-342 = 382$$

ולכן:

$$|x_3 - L| \le \frac{M}{2m}(0.05)^2 \le \frac{670}{2\cdot 382}(0.05)^2 \le 0.00219$$

5. א. המלבן הראשון שטחו hf(a+h/2) השני hf(a+3h/2) ונקבל:.

$$hf(a+\frac{h}{2}) + hf(a+\frac{3h}{2}) + \ldots = \sum_{k=0}^{n-1} hf(a+kh+\frac{h}{2}) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{(2k+1)h}{2})$$

ב. אפשר להוכיח כי עבור קטע יחיד עם נקודת בינים בימין, נוסחת הערכת השגיאה היא כמו עבור נקודת בינים בשמאל:

$$\frac{f'(c)(b-a)^2}{2}$$

כעת נאלץ לחלק כל קטע לשני תת קטעים, ועבור כל אחד נשתמש בנוסחת השגיאה הרגילה, נסכם ונקבל:

$$(\frac{h}{2})^2\frac{f'(c_1)}{2} + (\frac{h}{2})^2\frac{f'(c_2)}{2} + \ldots = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{h^2(f'(c_0)+\ldots+f'(c_{2n-1}))}{8} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8n^2}\sum_{k=0}^{2n-1} f'(c_i) = \frac{(b-a)^2}{4n}\,\frac{\sum_{k=0}^{2n-1} f'(c_i)}{2n} = \frac{(b-a)^2 f'(c)}{4n}$$

ג. נציב בסעיף א $f=x^2$ בקטע [a,b] ונקבל:

$$SR = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{(2k+1)h}{2}) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+\frac{(2k+1)h}{2})^2 =$$

$$= \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a^2+(2k+1)ah+\frac{(2k+1)^2h^2}{4}) =$$

$$= \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a^2+ah+\frac{h^2}{4})+k(2ah+h^2)+k^2h^2 =$$

$$= \frac{(b-a)}{n}[(a^2+ah+\frac{h^2}{4})n+(2ah+h^2)\frac{(n-1)n}{2}+h^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}] =$$

$$= \frac{(b-a)}{n}[(a^2+a\frac{(b-a)}{n}+\frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{n^2})n+(2a\frac{(b-a)}{n}+(\frac{(b-a)}{n})^2)\frac{(n-1)n}{2}$$

$$+(\frac{(b-a)}{n})^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}] = (b-a)a^2+\frac{a(b-a)^2}{n}+\frac{(b-a)^3}{4n^2}+\frac{(n-1)a(b-a)^2}{n}+$$

$$+\frac{(n-1)(b-a)^3}{2n^2}+\frac{(n-1)(2n-1)(b-a)^3}{6n^2}$$

ולכן:

$$SR = (b-a)a^2+\frac{a(b-a)^2}{n}+\frac{(b-a)^3}{4n^2}+\frac{(n-1)a(b-a)^2}{n}+$$

$$+\frac{(n-1)(b-a)^3}{2n^2}+\frac{(n-1)(2n-1)(b-a)^3}{6n^2} =$$

$$= (b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{12n^2}[3+2(n-1)(2n-1)+6(n-1)] =$$

$$= (b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{12n^2}(4n^2-1) \to$$

$$(b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{3} = (b-a)[a^2+a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3}] =$$

$$= (b-a)[ab+\frac{(b-a)^2}{3}] = (b-a)\frac{b^2+ab+a^2}{3} = \frac{b^3-a^3}{3}$$

ד. נציב ונקבל:

$$e=\frac{(b-a)^2 f'(c)}{4n}=\frac{(b-a)^2 2c}{4n}=\frac{(b-a)^2 c}{2n}\le\frac{(b-a)^2 b}{2n}$$

ה. $$e\le\frac{(b-a)^2 b}{2n}<\varepsilon\to\frac{(b-a)^2 b}{2\varepsilon}<n$$

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$, $M=\sup g'(x)$, $a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$| x_{n+1} - L | \le \frac{M}{2m} (x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $M = \sup f''$, $m = \inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$.