דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0) - (x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)\right),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\rightarrow l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$,
$M=\sup f'(x)$, $a\le x\le b$

יום ו, ב אדר א התשס"ה 11-2-2005 מבחן מועד א באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 2 חלקים. בחלק הראשון 5 שאלות בנות 39 סעיפים ביחד. כל סעיף שוה 2 נקודות וסה"כ 78 נקודות. בחלק השני 3 שאלות בנות 7 נקודות כ"א, וסה"כ 21 נקודות. הציון המקסימלי במבחן הוא 99 .

בהצלחה.

1. הבט בפונקציה ---=f(x) בקטע [--=a0=--,b0] . השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. $a_1=$, $b_1=$

ב. $a_2=$, $b_2=$

ג. $a_3=$, $b_3=$

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את $e_n=b_n-p$ כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. $e0=$,$e1=$,$e2=$,$e3=$

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

$e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

.2

הבט על ----=f(x) ו --=x0 . חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x1=$

ב. $x2=$

ג. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $en=xn-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e0=$, $e1=$, $e2=$, $e3=$

ה. חשב את $en+1/en$ $e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $en+1/(en)^2$
$e1/(e0)^2=$, $e2/(e1)^2=$, $e3/(e2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?
תשובה:

.3

הבט ב- $f(x)=$------ .

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את -- בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x_0 קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x_0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב $x_0=$-- וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$.

ה. $x_1=$

ו. $x_2=$

ז. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$ $e_3=$

ט. חשב את e_{n+1}/e_n $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

שאלה 4

בשאלה זו תתבקש לחשב לחשב סכום בשיטת ---- המבוסס על n קטעים שוים של ---=f(x) על הקטע [--,--] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי -- תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. תת הסכום הששי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ------ .

תשובה:
N=

ט. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של שיטת ---, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

י. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ט קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=