

השלמה 2- לשעור נומרית

נמשיך את הדוגמא של פולינום האינטרפולציה ע"ס שלש סדרות של נקודות השואפות ל-1. נגדיר $a_n=1, b_n=1+1/n, c_n=1+2/n$. אינטרפולציה על סמך שלש נקודות a, b, c .

$$p_{a,b,c}(x) = f(a) \frac{(x-b)(x-c)(b-c)}{vdm} +$$

$$-f(b) \frac{(x-a)(x-c)(a-c)}{vdm} + f(c) \frac{(x-b)(x-a)(a-b)}{vdm},$$

$$vdm = (a-b)(a-c)(b-c) = \text{van-der-moonde}$$

נציב ונקבל:

$$p(x) = 1 \frac{(x-1-1/n)(x-1-2/n)}{(1-1-1/n)(1-1-2/n)} +$$

$$-f(b) \frac{(x-1)(x-1-2/n)}{(1-1-1/n)(1+1/n-1-2/n)} +$$

$$+f(c) \frac{(x-1)(x-1-1/n)}{(1-1-2/n)(1+1/n-1-2/n)}.$$

נסמן $h=x-1$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{n^2}{2} (h - 1/n)(h - 2/n) - f(b)n^2h(h - 2/n) + \\
&+ f(c) \frac{n^2h(h - 1/n)}{2} = \\
&= \frac{n^2}{2} [(h - 1/n)(h - 2/n) - 2f(b)h(h - 2/n) + f(c)h(h - 1/n)] = \\
&\frac{n^2}{2} [h^2(1 - 2f(b) + f(c)) + h(-3/n + 4f(b)/n - f(c)/n) + 2/n^2].
\end{aligned}$$

נסדר ונקבל:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{n^2}{2} [h^2(1 - 2f(b) + f(c)) + h(-3/n + 4f(b)/n - \\
&f(c)/n) + 2/n^2] = \frac{n^2h^2}{2} (1 - 2f(b) + f(c)) + \\
&\frac{nh}{2} (-3 + 4f(b) - f(c)) + 1 = 3h^2(1 + 1/n) + h(3 - 2/n^2) + 1 \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3h^2 + 3h + 1.
\end{aligned}$$

נחשב את טור טיילור סביב $a=1$ ונקבל את אותה תשובה.