

השלמה 3- לשעור נומרית

פולינום טיילור כגבול של פולינומי אינטרפולציה (בלי שמוש בנוסחת האינטרפולציה של Lagrange).

נביט על הפונקציה ("לא ידועה") $f(x)=x^3$, ונסה לשחזר אותה על סמך הצבת שלשה קלטים $p=1-$
 $1/n, q=1, c=1+1/n$. נניח כי פולינום האינטרפולציה הוא $y=a+b(x-1)+c(x-1)^2$ נציב ונקבל:

$$\begin{cases} a + b \frac{-1}{n} + c \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 \\ a + 0b + 0c = 1 \\ a + b \frac{1}{n} + c \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \end{cases}$$

מהמשוואה השניה $a=1$. נחבר את המשוואות הראשונה והשלישית ונקבל

$$2a + \frac{2c}{n^2} = 2 + \frac{6}{n^2}$$

ולכן $c=3$. נחסר בין המשוואות הראשונה והשלישית ונקבל

$$\frac{2b}{n} = \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3}$$

ולכן $b=3+1/n$. לכן ישר האינטרפולציה (התלוי ב-n) הוא.

$$y = 3(x-1)^2 + \left(3 + \frac{1}{n^2}\right)(x-1) + 1.$$

ולעומתו, פרבולת טיילור ב- $a=1$ היא

$$y = 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1.$$

וברור כי פרבולות האינטרפולציה שואפות לפרבולת טיילור כאשר n שואף ל- ∞ .