השלמה 4- לשעור נומרית התשס"ז בנושא סבוכיות האלגוריתמים השונים לחשוב פולינום האינטרפולציה.

נשוה בין שלשה אלגוריתמים: 1.המידי הנובע ממשפט הקיום והיחידות 2. פולינום Lagrange. 3. פולינום Newil.

נתיחס לשתי שאלות: א. חשוב מקדמי הפולינום. ב. הצבה בפולינום (בלי שנתונים מקדמי הפולינום). ג. הצבה בפולינום (בהנחה שנתונים מקדמי הפולינום). השאלה השלישית לא תלויה בדרך בה חשבנו את הפולינום ולכן נתיחס רק ל-א ול-ב.

בכל אלגוריתם נתיחס רק למספר הכפלים והחלוקות ולא נתיחס למספר החבורים והחסורים.

א. חשוב מקדמי הפולינום

1. האלגוריתמים המידי הנובע ממשפט הקיום והיחידות.

במקרה זה יש לפתור את מערכת המשואות $Av=f$, כאשר A מטריצת ון דר מונדה, v וקטור מקדמי הפולינום ו-f הוא וקטור ערכי הפונקציה.

נפתור את המערכת על ידי שיטת גאוס. כיון שהעמודה השמאלית מכילה רק ערכי 1, אין צרך באף כפל או חלוקה. בעמודה השניה, לכל שורה, $a_{i,2}$ מחולק ב-$a_{2,2}$ והמנה נכפלת בשאר השורה. סה"כ n כפלים וחלוקות לכל שורה, ובסה"כ $(n-1)n$ כפלים וחלוקות בשלב זה. בעמודה השלישית יש $(n-1)(n-1)$ פעולות, ברביעית $(n-1)(n-2)$ וכן הלאה, עד שבעמודה האחרונה יש $(n-1)2$ פעולות. בסה"כ יש $(n-1)n+(n-1)(n-1)+\ldots+(n-1)2=(n-1)(n+2)(n-1)/2$.

2. פולינום Lagrange.

נחשב את מספר הכפלים במונה $(x-a)(x-b)\ldots(x-c)$ כאשר מחשבים את המקדמים.
עבור $(x-a)$ 0 כפלים.
עבור $(x-a)(x-b)$ יש כפל אחד.
עבור $(x-a)(x-b)(x-c)$ יש $1+2$ כפלים וכן הלאה, ולכן
עבור $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ יש $1+2+3+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$ כפלים. את המונה יש לכפל במקדם שהוא מכפלה ומנה של $(n+1)$ גורמים, ובטוי זה יש לחלק בכל מקדמי המונה, ולכן יש עוד $2(n+1)$ כפלים או חלוקות, ובסך הכל, במחובר לגרנז אחד יש
$n(n-1)/2+2(n+1)=[n(n-1)+4(n+1)]/2=[n^2+3n+4]/2$
ובכל הפולינום יש $(n+1)(n^2+3n+4)/2$ כפלים וחלוקות.

3. פולינום Newil.

בשלב א יש n פולינומים מדרגה 1 ועבור כל אחד צריך 4 כפלים וחלוקות. אח"כ יש $(n-1)$ פולינומים מדרגה 2 ועבור כל אחד צריך 7 כפלים וחלוקות, וכן הלאה, עד שבשלב האחרון יש פולינום יחיד עם $3n+1$ כפלים וחלוקות ולכן סה"כ נקבל :

$$4n+7(n-1)+\ldots+(3n+1)1=\sum_{k=1}^{n}(3k+1)(n+1-k)=$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}(3k+1)-\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=$$

$$=(n+1)\frac{(3n+2)n}{2}-3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=(n+1)\frac{(3n+2)n}{2}-3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$\frac{n(n+1)}{2}[3n+2-(2n+1)-1]=\frac{n(n+1)n}{2}$$

,

חלוקות וכפלים.

השואה בין החלוקות והכפלים של שלש השיטות.

$$\frac{(n-1)^2(n+2)}{2}=\frac{n^3-3n+2}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n^2+3n+4)}{2}=\frac{n^3+4n^2+7n+4}{2}$$

$$\frac{n(n+1)n}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$$

ולכן, השיטה הלינארית קצרה ביותר, נויל שניה ולגרנז שלישית.

ב. הצבה בפולינום (בלי שנתונים מקדמי הפולינום). שיטה זו אינה אפשרית כלל דרך משפט הקיום והיחידות, אך אפשרית בשיטות המתקדמות יותר.

2. פולינום Lagrange.

בכל מחובר יש (n-1) כפלים במונה ובמכנה, ואז יש לחלק מונה במכנה ולכפל הערך של f, סה"כ 2n כפלים וחלוקות בכל מחובר, וביחד יש 2n(n+1) כפלים וחלוקות.

3. פולינום Newil.

בכל פולינום יש שני כפלים וחלוקה אחת, סה"כ שלשה כפלים וחלוקות, וזה יש לכפל במספר הפולינומים שהוא $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=n(n+1)/2$, ולכן יש סה"כ $3n(n+1)/2$ פעולות. ברור שנויל עדיף על לגרנז שעדיף על שיטת משפט הקיום והיחידות.

תזכורת מספר הכפלים והחלוקות בהצבה בפולינום ידוע:

פשוט נכתב $ax^2+bx+c=(ax+b)x+c$ ולכן בפולינום ממעלה n יש n כפלים.