

השלמה לשעור נומרית

נביט בנוסחת פרבולת האינטרפולציה:

$$px^2 + qx + r = (f(a)(x-b)(x-c)(b-c) - f(b)(x-a)(x-c)(a-c) + f(c)(x-a)(x-b)(a-b)) / VDM$$

נזכר כי $VDM=(a-b)(a-c)(b-c)$ ולכן:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)(x-b)(x-c)(b-c)/(a-b)(a-c)(b-c) - f(b)(x-a)(x-c)(a-c)/(a-b)(a-c)(b-c) + f(c)(x-a)(x-b)(a-b)/(a-b)(a-c)(b-c) = \\ &= f(a)(x-b)(x-c)/(a-b)(a-c) - f(b)(x-a)(x-c)/(a-b)(b-c) + f(c)(x-a)(x-b)/(a-c)(b-c) = f(a)(x-b)(x-c)/(a-b)(a-c) + f(b)(x-a)(x-c)/(b-a)(b-c) + f(c)(x-a)(x-b)/(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

כעת נביט על $f(x)=x^3, a=(1-1/n), b=1, c=1+1/n$ ונציב בפולינום. נקבל:

$$f(x) = (1-1/n)^3 (x-1)(x-1-1/n)/(-1/n)(-2/n) + 1(x-1+1/n)(x-1-1/n)/(-1/n)(1/n) + (1+1/n)^3 (x-1+1/n)(x-1)/(-2/n)(-1/n).$$

כעת נחליף איברים מסדרים זהים ונקבל:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2[(n^2/2)(1-1/n)^3 + (n^2/2)(1+1/n)^3 - n^2] + \\ &(x-1)[(n/2)(1+1/n)^3 - (n/2)(1-1/n)^3] \\ &+ 1 \end{aligned}$$

נסדר ונקבל:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2(n^2/2)[(1-1/n)^3 + (1+1/n)^3 - 2] + (x-1)(n/2)[(1+1/n)^3 - (1-1/n)^3] \\ &+ 1 = (x-1)^2(n^2/2)[6/n^2] + (x-1)(n/2)[6/n + 2/n^3] + 1 = \\ &= 3(x-1)^2 + (3+1/n^2)(x-1) + 1 \end{aligned}$$

ואילו פולינום טיילור מסדר שניים הוא:

$$3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$$