השלמה שלישית לשעור נומרית

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \ne i} (x - a_j)}{\prod_{j \ne i} (a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)\right),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

תרגיל:

חשב את

$$\int_a^b x^2 dx$$

בארבע דרכים שונות.

1. על ידי הקדומה והמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי.

2. על ידי סכומי רימן (מלבנים) שוי בסיס ונקודות המיצגות משמאל כל תת קטע.

3. על ידי שיטת הטרפז עם טרפזים שוי גבה.

4. על ידי שיטת סימפסון על ידי קטעים שוים.

בכל שיטה חשב את השגיאה בפעל ועל ידי נוסחת הערכת השגיאה, ובדוק החל מאיזה N השגיאה בפועל תקטן מנוסחת הערכת השגיאה.

תשובה.

א.

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

ב.

$$SR = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a + i\frac{b-a}{n})^2 =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a^2 + 2ai\frac{b-a}{n} + i^2(\frac{b-a}{n})^2) =$$

$$\frac{b-a}{n}(na^2 + 2a\frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2} +$$

$$+(\frac{b-a}{n})^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}) =$$

$$= (b-a)(a^2 + a(b-a)\frac{n-1}{n} +$$

$$+(b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$= (b-a)(a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3}) =$$

$$\frac{(b-a)}{3}(3a^2 + 3ab - 3a^2 + a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

כעת נחשב את השגיאה בפועל:

$$E=\frac{(b-a)}{3}(a^2+ab+b^2)-SR=$$

$$=(b-a)(a^2+a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3})-$$

$$-(b-a)(a^2+a(b-a)\frac{n-1}{n}+$$

$$+(b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2})=$$

$$(b-a)(\frac{a(b-a)}{n}+$$

$$+(b-a)^2(\frac{1}{3}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2})=$$

$$=\frac{a(b-a)^2}{n}+\frac{(b-a)^3(3n-1)}{6n^2}$$

כעת נשתמש בנוסחת הערכת השגיאה: קודם כל צריך להעריך את $f'=2x$.
נניח כי $0<a<b$ ולכן מקסימום הנגזרת הוא $2b$ ולכן:

$E \le (b-a)^2 2b/2n = b(b-a)^2/n$. נשוה בין השגיאה בפועל ובין הערכת השגיאה:

$$\frac{a(b-a)^2}{n} + \frac{(b-a)^3(3n-1)}{6n^2} \le \frac{b(b-a)^2}{n}$$

$$\frac{(b-a)^3(3n-1)}{6n^2} \le \frac{(b-a)(b-a)^2}{n}$$

$$3n-1 \le 6n$$

ג. כעת נחזור על הסעיף האחרון עבור טרפזים שוי גבה.

$$ST=\frac{b-a}{2n}(a^2+2\sum_{i=1}^{n-1}(a+i\frac{b-a}{n})^2+b^2)=$$

$$=\frac{b-a}{2n}(a^2+b^2+$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1}(a^2+2ai\frac{b-a}{n}+i^2(\frac{b-a}{n})^2))=$$

$$\frac{b-a}{2n}((2n-1)a^2+b^2+4a\frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2}+$$

$$+2(\frac{b-a}{n})^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6})=$$

$$=(b-a)(a^2\frac{2n-1}{2n}+b^2\frac{1}{2n}+$$

$$a(b-a)\frac{n-1}{n}+(b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=$$

$$ST=(b-a)[a^2(\frac{2n-1}{2n}-\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2})$$

$$+b^2(\frac{1}{2n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2})+$$

$$ab(\frac{n-1}{n}-2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2})$$

$$=\frac{b-a}{6n^2}(a^2(3n(2n-1)-6n(n-1)+(n-1)(2n-1))$$

$$+b^2(3n+(n-1)(2n-1))+ab(6n(n-1)-2(n-1)(2n-1)]$$

$$=\frac{b-a}{6n^2}(a^2(2n^2+1)+b^2(2n^2+1)+ab(2n^2-2))=$$

$$=\frac{b-a}{6n^2}((a^2+b^2)(2n^2+1)+ab(2n^2-2))=$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{b-a}{3}(a^2+b^2+ab)=\frac{b^3-a^3}{3}$$

והשגיאה

$$E=\frac{(b-a)}{3}(a^2+ab+b^2)-ST=$$

$$=\frac{(b-a)}{6n^2}((a^2+b^2)2n^2+ab2n^2)-$$

$$-\frac{(b-a)}{6n^2}((a^2+b^2)(2n^2+1)+ab(2n^2-2)=$$

$$=\frac{(b-a)}{6n^2}(2ab-(a^2+b^2))=-\frac{(b-a)^3}{6n^2}$$

כעת נשתמש בנוסחת הערכת השגיאה: קודם כל צריך להעריך את $f''=2$.
$E\leq 2(b-a)^3/12n^2=(b-a)^3/6n^2$. כלומר זהה לשגיאה בפועל, כיון שלא היה לנו אי שויון בהערכת הנגזרת.

ד. כעת נחזור על הסעיף האחרון עבור נוסחת סימפסון.

$$SSi=\frac{b-a}{6n}(a^2+2\sum_{i=1}^{n-1}(a+2i\frac{b-a}{2n})^2+$$

$$+4\sum_{i=1}^{n}(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n})^2+b^2)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}(a^2+2\sum_{i=1}^{n-1}(a+2i\frac{b-a}{2n})^2+b^2)$$

$$+\frac{4(b-a)}{6n}\sum_{i=1}^{n}(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n})^2=$$

$$\frac{ST}{3}+\frac{2(b-a)}{3n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+2a(2i-1)\frac{b-a}{2n}+$$

$$+(2i-1)^2(\frac{b-a}{2n})^2))$$

$$=\frac{ST}{3}+\frac{2(b-a)}{3n}[na^2+2a\frac{(2n)n}{2}\frac{b-a}{2n}+$$

$$+\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\frac{(b-a)^2}{4n^2}]$$

ולכן:

$$SSi=\frac{ST}{3}+\frac{2(b-a)}{3n}[na^2+2a\frac{(2n)n}{2}\frac{b-a}{2n}+$$

$$+\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\frac{(b-a)^2}{4n^2}]=$$

$$\frac{ST}{3}+\frac{2(b-a)}{3}[a^2+a(b-a)+$$

$$+\frac{(2n-1)(2n+1)}{12n^2}(b-a)^2]=$$

$$SSi=\frac{ST}{3}+\frac{(b-a)}{18n^2}[12n^2ab+$$

$$+(2n-1)(2n+1)(b-a)^2]=$$

$$=\frac{ST}{3}+\frac{(b-a)}{18n^2}[12n^2ab+$$

$$+(4n^2-1)(a^2+b^2-2ab]=$$

ולכן

$$=\frac{ST}{3}+\frac{(b-a)}{18n^2}[(4n^2+2)ab+$$

$$+(4n^2-1)(a^2+b^2)]$$

ולכן:

$$SSi = \frac{(b-a)}{18n^2}[(4n^2+2)ab +$$

$$+(4n^2-1)(a^2+b^2)+(2n^2-2)ab+$$

$$+(2n^2+1)(a^2+b^2)] =$$

$$= \frac{(b-a)}{18n^2}[6n^2(a^2+b^2+ab)] =$$

$$= \frac{(b-a)}{3}(a^2+b^2+ab) = \int_a^b x^2 dx$$

ולכן Ssi הוא האינטגרל, השגיאה היא 0 וגם נוסחת הערכת השגיאה נותנת 0 בגלל הנגזרת.

וכעת: