השלמה 4 לשעור נומרית התשס"ג

נתונה פונקציה f בקטע [a,b] ורוצים למצוא את פולינום האינטרפולציה שלה בקטע על סמך x=a,(a+b)/2,b . נתקדם לפי נוסחת לגרנז:

נביט על

$$\frac{(X-a)(X-b)}{(a+b/2-a)(a+b/2-b)}=$$

$$=\frac{(x-a)(x-b)}{-(b-a/2)(b-a/2)}=\frac{-4(x-a)(x-b)}{(b-a)^2}$$

נביט על

$$\frac{(X-a)(X-a+b/2)}{(b-a)(b-a+b/2)}=$$

$$=\frac{2(X-a)(X-a+b/2)}{(b-a)^2}$$

ונביט על

$$\frac{(X-b)(X-a+b/2)}{(a-b)(a-a+b/2)}=$$

$$=\frac{2(X-b)(X-a+b/2)}{(b-a)^2}$$

כשחשבנו את השגיאה בנוסחת הטרפז ראינו כי

$$\int_a^b (X-a)(X-b)dx = -\frac{4\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3} =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{6}$$

ולכן האינטגרל של הבטוי הראשון הוא:

$$-\frac{(b-a)^3}{6}\frac{(-4)}{(b-a)^2} = \frac{2(b-a)}{3}$$

נביט על הפרבולה המתאפסת ב- a,(a+b)/2 ונחשב את האינטגרל על [a,b] .
נציב משתנה t=x-(3a+b)/4 . אז כאשר x=a, t=-(b-a)/4=-c וכאשר x=b,
t=3(b-a)/4=3c . כמו כן, x-a=t+(3a+b)/4-a=t+c ו- x-
(a+b)/2=t+(3a+b)/4-(2a+2b)/4=t-c ולכן

$$\int_a^b \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)(x-{a+b}/{2})dx =$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}\int_c^{3c}(t-c)(t+c)dt =$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}[\frac{t^3}{3}-c^2t]_{-c}^{3c} =$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}[(\frac{(3c)^3}{3}-c^2 3c)-(\frac{(-c)^3}{3}-c^2(-c))] =$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}(6c^3-\frac{2}{3}c^3) =$$

$$= \frac{32c^3}{3(b-a)^2} = \frac{32({b-a}/{4})^3}{3(b-a)^2} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{6(b-a)^2} = \frac{(b-a)}{6}$$

וגם האינטגרל השלישי יוצא זהה.

ולכן:

$$ST = \frac{(b-a)}{6} f(a) + \frac{2(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +$$

$$+ \frac{(b-a)}{6} f(b) =$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] =$$

$$= \frac{(b-a)/2}{3}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

ומתוך נוסחה זו מוצאים את הנוסחה הכללית.