השלמה 5 לשעור נומרית התשס"ה

שיטת ניוטון רפסון לפעמים מתבדרת (בתלות ב-x_0).

דוגמא: (סרגיי).

נביט בפונקציה: $f(x)=\arctan(x)$. למשואה $f(x)=0$ יש פתרון יחיד $x=0$, אבל נתעלם מכך וננסה להתכנס לפתרון. אז $x_{n+1}=x_n-(\arctan(x_n))/(1/(1+x_n^2))$, ואנו רוצים לדעת מתי $x_{n+1}-x_n>0$, או מה ששקול, מתי $\arctan(x_n)(1+x_n^2)<0$ או מה ששקול $\arctan(x_n)<0$. כלומר הסימן של $x_{n+1}-x_n$ הפוך לזה של x_n. כלומר, אם x_n חיובי, אז איננו יותר x_{n+1} חיובי.

אולם יתכן כי x_{n+1} שלילי, ויותר רחוק מ-0 מאשר x_n. כדי לברר זאת נביט במנה $(x_{n+1})/(x_n)$. אז $(x_{n+1})/(x_n)=1-\arctan(x_n)(1+x_n^2)/(x_n)$. מנה זו תמיד קטנה מ-1, כיון ש$\arctan(a)/a$ תמיד חיובית.

נראה באלו תנאים

דוגמא נוספת:

נביט על $x/1+x^2$. מחקירת הפונקציה היא יורדת מציר ה-x עד הנקודה $(-1,-0.5)$ עולה דרך הראשית עד הנקודה $(1,0.5)$ ואז יורדת אסימפטוטית עד ציר x . אינטואיטיבית, כל נקודה שניקח כ-x_0 ואשר מרחקה מהראשית יותר מ-1, תמשיך להתרחק מהראשית, ולכן לא תתכנס.

נראה זאת בצורה פורמלית יותר. $x_{n+1}=x_n-((x_n)/(1+x_n^2))/((1-x_n^2)/(1+x_n^2)^2)=$

$=(x_n-x_n^3-x_n-x_n^3)/(1-x_n^2)=(2x_n^3)/(x_n^2-1)$,

כעת נביט על $x_{n+1}-x_n=-((x_n)/(1+x_n^2))/((1-x_n^2)/(1+x_n^2)^2)=-$
$((x_n)(1+x_n^2))/((1-x_n^2)=((x_n)(1+x_n^2))/((x_n^2-1)$

הסימן של הבטוי האחרון הוא כמו הסימן של $(x_n)/((x_n^2-1)$. אם $x_n>1$ אז $(x_n)/((x_n^2-1)>0$ ואז $x_{n+1}-x_n>0$ כלומר x_{n+1} יהיה עוד יותר גדול מאשר x_n ולכן הסדרה תתבדר ל-∞.

בצורה דומה . אם $x_n<-1$ אז $(x_n)/((x_n^2-1)<0$ ואז $x_{n+1}-x_n<0$ כלומר x_{n+1} יהיה עוד יותר קטן מאשר x_n ולכן הסדרה תתבדר.

לכן אם הסדרה מתכנסת, חיב להתקים $-1\le x_0\le 1$. עבור x_0 שכזה, x_1 זז לכוון ה-0 . כדי לודא כי x_1 זז אך לא יותר מדי, יש להביט על המנה $(x_{n+1})/(x_n)$. אז

$$(x_{n+1})/(x_n)=1-[((x_n)/(1+x_n^2))/((1-x_n^2)/(1+x_n^2)^2)]/(x_n)=1-(1+x_n^2))/((1-x_n^2)=(2x_n^2)/(x_n^2-1).$$

היינו רוצים כי המנה תהיה בין 1- ו-1 . נניח כי $-1\le x_n\le 1$. אז $(2x_n^2)/(x_n^2-1)<1$ שקול ל $2x_n^2>x_n^2-1$ או ל- $x_n^2>-1$ אשר תמיד מתקים.
לכן תמיד מתקים $(x_{n+1})/(x_n)<1$.

כעת נבדק מתי $-1<2x_n^2/(x_n^2-1)$. נעביר אגפים ונקבל $1-x_n^2>2x_n^2$ או $1>3x_n^2$, ואי שויון זה מתקים רק כאשר $-0.577\sim-1/\sqrt{3}<x_n<1/\sqrt{3}\sim0.577$.

מסקנה: אם x_0 בקטע זה, תהיה התכנסות. אחרת, הסדרה תתבדר.

בדיקה אחרת על ידי משפט נקודות השבת.

נביט על $g(x)$ ונחשב מתי נגזרתה קטנה מ-1. אז _$g(x)=2x^3/(x^2-1)$. אז $g'(x)=(6x^2(x^2-1)-2x2x^3)/(x^2-1)^2=(2x^4-6x^2)/(x^2-1)^2$. אי השויון $g'(x)<1$ שקול ל-

$2x^4-6x^2<(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$ אשר שקול ל- $x^4-4x^2-1<0$ כלומר $2-$
$\sqrt{5}<x^2<2+\sqrt{5}$ כלומר $0\leq x^2<2+\sqrt{5}$ כלומר $-2.058\sim-$
$\sqrt{(2+\sqrt{5})}<x<\sqrt{(2+\sqrt{5})}\sim 2.058$. אי השויון $-1<g'(x)$ שקול ל-- $2x^2-x^4$
$1<2x^4-6x^2$ או ל- $0<3x^4-8x^2+1$ או לאחוד הקטעים $(4+\sqrt{13})/3<x^2$ ו-
$x^2<(4-\sqrt{13})/3\sim 0.131$ ולכן $-0.362<x<0.362$

נשים לב כי משפט נקודות השבת נותן תוצאה פחות טובה.