השלמה 6 לשעור נומרית התשס"ו

תנאי מספיק להתכנסות שיטת ניוטון רפסון.

נביט בפונקציה f כך ש- $f'\neq 0, f''\neq 0$ ורציפות בקטע [a,b], וכך ש- $f(a)f(b)<0$. נבחר x_0 בקטע כך ש $f'f''(x_0-l)>0$ אז סדרת ניוטון רפסון מתכנסת.

הוכחה:

לפי ההנחה יש בקטע שרש יחיד שיסומן l. אם $x_0=l$ אז ההוכחה הסתימה.
אחרת ההוכחה מתחלקת לארבעה מקרים: $x_0<x_1$ או $x_0>x_1$, ו- $f'<0$ או $f'>0$. נבדק מקרה אחד-שאר המקרים דומים.

מקרה ראשון

נניח כי $l<x_0$ ו- $f'>0$. אז $f(x_0)>0$. כמו כן אז $f''>0$. אז $x_1-x_0=(-f(x_0))/f'(x_0)=-/+=-$ כלומר $x_1<x_0$.

בנוסף

$$f'(d)(x_1-l)=f(x_1)-f(l)=f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f'(x_0)+f''(c)(x_1-x_0)^2/2$$
$$=0+f''(c)(x_1-x_0)^2/2.$$

הסכום של שני האיברים הראשונים בצד ימין הוא 0 כיון שנקודת החתוך של המשיק ב- x_0 היא x_1. לכן:

$$(x_1-l)=f''(c)(x_1-x_0)^2/[2(f'(d)]$$

לכן $l<x_1<x_0$. נמשיך באינדוקציה ונקבל כי x_n סדרה יורדת והסומה מלרע על ידי l.

מקרה שני

נניח כי $l<x_0$ ו-$f'<0$. אז $f(x_0)<0$. כמו כן אז $f''<0$. אז $x_1-x_0=(-f(x_0))/f'(x_0)=+/-=-$ כלומר $x_1<x_0$.

בנוסף

$$(x_1-l)=f''(c)(x_1-x_0)^2/[2(f'(d)]$$

לכן $l<x_1<x_0$. נמשיך באינדוקציה ונקבל כי x_n סדרה יורדת והסומה מלרע על ידי l.

מקרה שלישי

נניח כי $l>x_0$ ו-$f'>0$. אז $f(x_0)<0$. כמו כן אז $f''<0$. אז $x_1-x_0=(-f(x_0))/f'(x_0)=+/+=+$ כלומר $x_1>x_0$.

בנוסף

$$(x_1-l)=f''(c)(x_1-x_0)^2/[2(f'(d)]$$

לכן $l>x_1>x_0$. נמשיך באינדוקציה ונקבל כי x_n סדרה עולה והסומה מלעיל על ידי l.

מקרה רביעי

נניח כי $l>x_0$ ו-$f'<0$. אז $f(x_0)>0$. כמו כן אז $f''>0$. אז $x_1-x_0=(-f(x_0))/f'(x_0)=-/-=+$ כלומר $x_0>x_1$.

בנוסף

$(x_1-l)=f''(c)(x_1-x_0)^2/[2(f'(d)]$

לכן $l>x_1>x_0$. נמשיך באינדוקציה ונקבל כי x_n סדרה עולה והסומה מלעיל על ידי l.

לכן הסדרה x_n מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L.

כיון ש $x_{n+1}=x_n-(f(x_n))/f'(x_n)$ נפעיל את הגבול בהיות f רציפה ונקבל $L=L-(f(L))/f'(L)$ ולכן $f(L)=0$ והיא חיבת להיות נקודת השבת $L=l$.

שאר המקרים דומים:

<u>הערכת השגיאה</u>:

$$f'(d)(x_{n+1}-x_0)=f(x_{n+1})-f(x_0)= f(x_{n+1})= f(x_n)+(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f''(c)(x_{n+1}-x_n)^2/2$$

$$=0+ f''(c)(x_{n+1}-x_n)^2/2.$$

הסכום הוא 0 כיון שנקודת החתוך של המשיק ב- x_n היא x_{n+1}. לכן:

$$(x_{n+1}-x_0)=f''(c)(x_{n+1}-x_n)^2/[2(f'(d)]$$

נסמן $\mathrm{Sup}\ f''=M, \inf f'=m\neq 0$. לכן $(x_{n+1}-x_0)\leq M(x_{n+1}-x_n)^2/2m$