דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$- .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0, x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ד, יט איר התשס"ג 21-5-2003 סמסטר א, מועד ג.

מבחן באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 83 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 7 שאלות במשקל 16 נקודות כל אחת, ויש לענות בו 5 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-5 תשובות, תבדקנה רק 5 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 16 נקודות, כולל שתי שאלות ואשר מביניהן יש לבחור אחת. כל שאלה במשקל 16 נקודות, והיא קשורה לחומר הנלמד

בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית. אם נענו שתי השאלות, תבדק רק התשובה הראשונה.

שאלה, שלא נתנה לה תשובה נכונה בשאלון, ושנבחרה על ידי הנבחן, תזכה אותו במלא הנקודות.

בהצלחה.

חלק א

אינטגרציה נומרית

1.נתונה הפונקציה $f=_{e}(x^2)$ בקטע [a=0 ,b=4]. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-n=8 קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(1+4e+2e^4+4e^9+e^{16})/12$

ב. $(1+4e+2e^4+4e^9+e^{16})/6$

ג. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+2e^4+4e^{25/4}+2e^9+4e^{49/4}+e^{16})/12$

ד. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+2e^4+4e^{25/4}+2e^9+4e^{49/4}+e^{16})/6$

פתרון: לפי הנוסחה יוצא סעיף ד.

2.נתונה הפונקציה $f=x^3+x$ בקטע [a,b]. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((n^2(a^3+b^3+a^2b+ab^2+2a+2b)+a^3+b^3-a^2b-ab^2)/4n^2$

ב. $(b-a)((n^2(a^3+b^3-a^2b-ab^2+2a+2b)+a^3+b^3-a^2b-ab^2)/4n^2$

ג. $(b-a)((n^2(a^3+b^3+a^2b+ab^2+2a+2b)+a^3+b^3+a^2b+ab^2)/4n^2$

ד. $(b-a)((n^2(a^3+b^3-a^2b-ab^2+2a+2b)+a^3+b^3+a^2b+ab^2)/4n^2$

פתרון : במועד ב חשבנו את הסכום בשיטת הטרפז עבור $f(x)=x^3$. יצא $(b-a)((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-1)(n+1)(a^2b+ab^2))/4n^2$. ל- $f(x)=x$ הסכום $(b^2-a^2)/2=(a+b)(b-a)/2=(b-a)[2n^2a+2n^2b)/4n^2$. ביחד יוצא:
$(b-a)((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-1)(n+1)(a^2b+ab^2))/4n^2$

$+(b-a)[2n^2a+2n^2b)/4n^2=(b-a)(n^2(a^3+b^3+a^2b+ab^2+2a+2b)+(a^3+b^3-a^2b-ab^2))/4n^2$

וזוהי התשובה של סעיף א.

3.נתונה $f=x[e^{(-2x^2)}]$ (x כפול ב- $e^{(-2x^2)}$) בקטע $[a=0,b=2]$. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 1786 ב. 2001 ג. 3 ד. 22501

פתרון: נוסחת השגיאה היא $f'(c)(b-a)^2/2n$. אז $(b-a)^2=4$, ונותר להעריך את 'f בקטע. $f''=4x[e^{(-2x^2)}](4x^2-3)$. $f''=0$ גורר ש-$x=0$ או $x=\pm(\surd 3)/2$. לכן יש להציב את 0 , את $(\surd 3)/2$ ואת הקצה $x=2$ ב-$f'=(1-4x^2)[e^{(-2x^2)}]$ ונקבל: $f'(0)=1$. $f'((\surd 3)/2)=-2/e^{3/2}$, $f'(2)=-15/e^8$
ובערך מוחלט המקסימלי מבין הערכים הוא $f'(0)=1$. ולכן
נקבל $4\cdot 1/2n<0.001$ או $n>2000$, והתשובה היא ב.

פתרון של משוואות:

4. המשוואה $f(x)=x^3-2x^2-x-14=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=16]$. נערכו 3 איטרציות. אז c_3 שוה ל-

פתרון: $f(0)=-14<0,f(16)=4096-1024-2-14>0,f(8)=512-128-8-14>0,f(4)=64-32-2-14>0,f(2)=8-8-2-14<0$ ולכן התשובה היא $c=3$.

א. 3 ב. 1 ג. 7 ד. 5

5. המשואה $f(x)=(x^2-5x+8)/2 =0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=3$. נערכו 2 איטרציות. אז x_3 שווה ל-

א. 6 ב. 10 ג. 2 ד. 16/3

פתרון: $f(0)=4,f(3)=1,x_2=(0-12)/(1-4)=4,f(4)=2,x_3=(6-4)/(2-1)=2$

6. המשואה $f(x)= 5x^3-7x^2+x-1=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,$. נערכו 2 איטרציות. אז x_2 שווה ל-

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4

פתרון: $g=x-f/f'=x-(5x^3-7x^2+x-1)/(15x^2-14x+1)=(10x^3-7x^2+1)/(15x^2-14x+1) =g(x).g(0)=1.g(1)=4/2=2$

אינטרפולציה

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(-2)=31, f(-1)=5,f(0)=1,f(1)=1,f(2)=11$. הצג את הפולינום כ: $ax^4+bx^3+ cx^2+dx+e$. אז $c=$

א. 4 ב. 2 ג. 3 ד. 1

פתרון: נמצא את הפולינום לפי שיטת נוויל:

$$\begin{pmatrix} f(-2)=31 & & & & \\ & p & & & \\ f(-1)=5 & & t & & \\ & q & & w & \\ f(0)=1 & & u & & m \\ & r & & k & \\ f(1)=1 & & v & & \\ & s & & & \\ f(2)=11 & & & & \end{pmatrix}$$

כאשר p,q,r,s הם פולינומים ממעלה ראשונה, t,u,v ממעלה שניה, w,k ממעלה שלישית ו-m הפולינום שהתבקש הוא ממעלה רביעית. בכל פולינום אפשר לבצע בדיקה ע"י הצבה. נקבל:

$p(x)=(5(x+2)-31(x+1))/1=-26x-21$,
$q(x)=((x+1)-5(x-0))/1=-4x+1$,
$r(x)=((x-0)-(x-1))/1=1$,
$s(x)=11(x-1)-(x-2))/1=10x-9$,
$t(x)=((-26x-21)(x-0)-(-4x+1)(x+2))/(-2)=11x^2+7x+1$,
$u(x)=((-4x+1)(x-1)-(1)(x+1))/(-2)=2x^2-2x+1$,
$v(x)=(1)(x-2)-(10x-9)(x-0))/(-2)=5x^2-5x+1$,
$w(x)=((11x^2+7x+1)(x-1)-(2x^2-2x+1)(x+2))/(-3)=-3x^3+2x^2+x+1$,
$k(x)=((2x^2-2x+1)(x-2)-(5x^2-5x+1)(x+1))/(-3)= x^3+2x^2-3x+1$,
$m(x)=((x^3+2x^2-3x+1)(x+2)-(-3x^3+2x^2+x+1)(x-2))/4=x^4-x^3+x^2-x+1$,

ולכן, $c=1$

חלק ב: שאלות יצירתיות.

בחר בשאלה 8 או 9

8. הזכר במחברתך בהוכחת משפט הקיום והיחידות של פולינום האינטרפולציה שנעשתה בכתה, וענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה במעגל. (המחברת לא תבדק).

א. בהוכחת המשפט משתמשים בצורת פולינום לגרנז: נכון/לא נכון.
ב. בהוכחת המשפט משתמשים במשפט ערך הבינים של לגרנז: נכון/לא נכון.
ג. בהוכחת המשפט משתמשים בדטרמיננט ון דר מונדה: נכון/לא נכון.

תשובות לא , לא, כן.

9. הזכר במחברתך בהוכחת משפט הערכת השגיאה של פולינום האינטרפולציה שנעשתה בכתה, וענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה במעגל. (המחברת לא תבדק).

א. בהוכחת המשפט משתמשים בצורת פולינום לגרנז: נכון/לא נכון.
ב. בהוכחת המשפט משתמשים במשפט ערך הבינים של לגרנז: נכון/לא נכון.
ג. בהוכחת המשפט משתמשים בדטרמיננט ון דר מונדה: נכון/לא נכון.

תשובות לא , כן, לא.