## דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

### נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

### נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

### נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

### נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

### מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2}=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ . אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$ , או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$.
הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיך):

$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1} f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

יום ו, יט טבת התשס"ה 31-12-2004 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 3 שאלות. שאלה 1 בת 7 סעיפים, 2 בת 16 סעיפים ו-3 בת 11 סעיפים. סה"כ 34 סעיפים.

כל סעיף אחר שווה 3 נקודות, סה"כ 3x34=102 .

בהצלחה.

1 . הבט בפונקציה $f(x)=$ .

א. חשב את $f(0)$ . תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$ . תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$ . תשובה:

ד. חשב את $f'''(0)$ . תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$ . תשובה:

ו. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 4 כולל.

תשובה:

ז. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

2. הבט בפונקציה $f(x)=$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(d)=,f(b)=$ . וסמן אותו $p$ .

תשובה:
$p=$

ב. חקור את $f\text{-}p$ ומצא את הנקודה $a$ שם ל-$f\text{-}p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם $a$ לא שלמה.

תשובה:
$a=$

ג. הצב את הנקודה $a$ שמצאת בסעיף הקודם ב- $f\text{-}p$ .

תשובה: $(f\text{-}p)(a)=$ .

ד. חשב את $f''$ . תשובה:
$f''=$ .

השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך במחברת את $|f\text{-}p|$ . בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

ה. מצא קבוע אשר חוסם את $f^{(2)}c(x)$.

תשובה:
$|f^{(2)}(c(x))\ |\leq$

ו. חקור את הפונקציה $(x-a_0)(x-a_1)$ אשר נמצאת בנוסחת השארית, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה:
$a=$ .

ז. הצב את a אשר מצאת בסעיף הקודם בבטוי $(x-a_0)(x-a_1)$

תשובה: $|(a-a_0)(a-a_1)|=$

ח. השתמש בתשובות של סעיפים ה, ז כדי להעריך את $|f-p|$

תשובה:
$|f-p|\leq$

נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=d<a_1<a_2<,\dots,<a_n=b$ . נסמן פולינום זה על ידי $p_n$ . השתמש במחברתך בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ .
בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

ט. כתוב את הנגזרת ה-n-ית של f עבור.

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. חסום את $f^{(n+1)}=$ בקטע $[d,b]$ על ידי פונקציה של n .

תשובה:

$|f^{(n+1)}| \leq$

יא. חסום את $(x-a_0)\ldots(x-a_n)$ על ידי פונקציה של n .

תשובה: $|(x-a_0)\ldots(x-a_n)| \leq$

יב . הצב את התשובות של סעיפים י-יא בנוסחת השארית של לגרנז.

תשובה: $|f- p_n| \leq$

יג. פשט את החסם שמצאת בנוסחה יב כך שיהיה פחות תלוי ב- n .

תשובה:

$|f- p_n| \leq$

יד. מהו הגבול של הבטוי שמצאת בסעיף יג, כאשר n שואף ל-$\infty$?

תשובה:

בסעיפים הבאים אנו עוברים לבעיה אשר זהה לבעיה המוצגת בין סעיפים ח-ט, חוץ מהעובדה כי הבטוי $a_0=d<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=b$ מוחלף בבטוי $a_0=d<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=b1$: השתמש במחברתך בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ . בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

טו. הבטוי המתאים ל-יג עבור הבעיה החדשה הוא:

תשובה:
$|f-p_n|\le$

טז. על סמך סעיף טו, מצא N כך לכל N<n מתקיים $|f-p_n|\le 0.001$

תשובה:
N=

שאלה 3

הבט בפונקציה $f(x)=$ על הקטע $[a,b]$

בשלשת הסעיפים הבאים הנך מתבקש לחשב קרובים של האינטגרל. בכל התשובות, הבט על מספרים כמו $3\cos(2)$ כעל תשובה מלאה-אין צורך לפתח אותם יותר.

א. חשב את סכום רימן המבוסס על 5 קטעים שוים, נקודת בינים בשמאל.

תשובה:

ב. חשב את סכום הטרפז המבוסס על 5 קטעים שוים.

תשובה:

ג. חשב את סכום סימפסון המבוסס על m=4 קטעים שוים גדולים, n=8 חצאי קטעים.

תשובה:

בסעיפים הבאים ג-יא תתבקש לחשב לחשב סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים של g(x) על הקטע [a,b] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, ובטא אותו בלי הבטוי סיגמא.

ד. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ח. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ט. מצא N כך שעבור n>N מתקים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001
.

תשובה:
N=

י. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של $n$ .

תשובה:

יא. מצא $N$ כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף י קטנה מ-0.001 .

תשובה:

$N=$