דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0) - (x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ו, יט טבת התשס"ה 31-12-2004 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 3 שאלות. שאלה 1 בת 7 סעיפים, 2 בת 16 סעיפים ו-3 בת 11 סעיפים. סה"כ 34 סעיפים.

כל סעיף אחר שוה 3 נקודות, סה"כ 3x34=102 .

בהצלחה.

1 . הבט בפונקציה $f(x)=x\sin(x)$.

א. חשב את $f(0)$. תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$. תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$. תשובה:

ד. חשב את $f'''(0)$. תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$. תשובה:

ו. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 4 כולל.

תשובה:

ז. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

תשובה לשאלה 1

. $f(x)=x\sin(x), f(0)=0$.

נגזר ונקבל $f'=x\cos(x)+\sin(x), f'(0)=0$.

נחשב את f'' .

$f''=-x\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)=2\cos(x)-x\sin(x), f''(0)=2$.

נחשב את f''' .

$f'''=-x\cos(x)-2\sin(x)-\sin(x)=-x\cos(x)-3\sin(x), f'''(0)=0$.

כעת נחשב את f'''' :

$f''''=x\sin(x)-\cos(x)-3\cos(x)=x\sin(x)-4\cos(x), f''''(0)=-4$.

ולכן נקבל חלק מטור מקלורן:

$$f\sim 0+2x^2/\cdot 2-4x^4/24+\ldots=x^2/1!-x^4/3!+\ldots=$$
$$x(1-x^3/3!+\ldots)=x\sin(x)$$

נשים לב כי זהו טור מקלורן של $\sin(x)$ אותו כפלנו ב- x . לכן נקבל את הטור כלו: לכן נקבל את ההצגה:

$$f \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(-x^2)^k}{(2k-1)!}$$

2. הבט בפונקציה

$$f = \sqrt{x^3}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(1)=1, f(4)=8$. וסמן אותו p .

תשובה: p=

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: a=

ג. הצב את הנקודה a שמצאת בסעיף הקודם ב- f-p .

תשובה: . (f-p)(a)=

ד. חשב את f'' . תשובה: f''=

.

השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך במחברת את |f-p| . בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

ה. מצא קבוע אשר חוסם את $f^{(2)}c(x)$.

תשובה: $|f^{(2)}c(x)\ | \le$

ו. חקור את הפונקציה $(x-a_0)(x-a_1)$ אשר נמצאת בנוסחת השארית, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה:
. a=

ז. הצב את a אשר מצאת בסעיף הקודם בבטוי $(x-a_0)(x-a_1)$

תשובה: $|(a-a_0)(a-a_1)| =$

ח. השתמש בתשובות של סעיפים ה, ז כדי להעריך את $|f-p|$

תשובה:
$|f-p| \le$

נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=1<a_1<a_2<,\dots, <a_n=4$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש במחברתך בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$. בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f עבור $2 \le n$.

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. חסום את $f^{(n+1)}=$ בקטע [1,4] על ידי פונקציה של n .

תשובה:
$|f^{(n+1)}\ | \le$

יא. חסום את $(x-a_0)\dots(x-a_n)$ על ידי פונקציה של n .

תשובה: $|(x-a_0)\dots(x-a_n)| \leq$

יב . הצב את התשובות של סעיפים י-יא בנוסחת השארית של לגרנז.

תשובה: $|f- p_n| \leq$

יג. פשט את החסם שמצאת בנוסחה יב כך שיהיה פחות תלוי ב- n .

תשובה: $|f-$
$p_n| \leq$

יד. מהו הגבול של הבטוי שמצאת בסעיף יג, כאשר n שואף ל-∞?

תשובה:

בסעיפים הבאים אנו עוברים לבעיה אשר זהה לבעיה המוצגת בין סעיפים ח-ט, חוץ מהעובדה כי הבטוי $a_0=1<a_1<a_2<,\dots, <a_n=4$ מוחלף בבטוי $a_0=1<a_1<a_2<,\dots, <a_n=1.96$: השתמש במחברתך בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$. בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

טו. הבטוי המתאים ל-יג עבור הבעיה החדשה הוא:

תשובה: $|f-$
$p_n| \leq$

טז. על סמך סעיף טו, מצא N כך לכל n>N מתקיים $|f- p_n| \leq 0.001$

תשובה:
N=

תשובה לשאלה 2

א. ישר האינטרפולציה הוא
$(8-1)(x-1)/(4-1)+1=7(x-1)/3+1=(7x-4)/3$ ואכן אם נציב בו את $x=1,4$
נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .

ב,ג. $R=f-p=x^{(3/2)}-(7x-4)/3$. אז $R'= 3x^{(1/2)} /2-7/3$. נמצא מתי $R'>0$.
אז $3x^{(1/2)} /2-7/3>0$ או $x^{(1/2)} >14/9$ או $x >196/81$. בקטע זה f עולה, ולפני כן יורדת, ומכיון שבקצות הקטע $f=0$ ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מינימלית, או מקסימלית בערך מוחלט. ערך השגיאה הוא
$(196/81)^{(3/2)}-(7(196/81)-4)/3=2744/729-(1372-324)/243=$
$=-400/729\sim0.5486968$

ד,ה. $f''=(3/4)x^{(-1/2)}$. זוהי פונקציה יורדת בקטע [1,4] ולכן ערך המקסימום שלה נמצא כאשר $x=1$ ושוה בערכו המוחלט 3/4 . לכן
$|f-p|\leq(3/4)(x-1)(x-4)/2!$.

ו,ז,ח. נביט על $(x-1)(x-4)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר $x=5/2$. אז ערכה הוא $-9/4$ ולכן,
$|f-p|\leq(3/4)(9/4)/2=(27/32)\sim0.84375$

ט. $f^{(n)}=(-1)^{(n)}3*1*3*5*\ldots*(2n-5)x^{-(2n-3/2)}/2^n$.

י. הנגזרת פונקציה יורדת ולכן ערכה המוחלט המקסימלי הוא כאשר $x=1$.
לכן נקבל:

$|f^{(n+1)}|\leq3*1*3*5*\ldots*(2n-3)/2^{n+1}$

יא. $|(x-a_0)\ldots(x-a_n)|\leq3^{n+1}$

יב.

$|f- p_n| \le 3*1*3*5*\ldots*(2n-3)\ 3^{n+1}/2^{n+1}(n+1)!$

יג. כדי להעריך בטוי זה כך שיופיעו בו פחות n ים, נכתב חלק מהמונה והמכנה כך:

$|f-p_n| \le 3*(1/2)*(3/2*2)*(5/2*3)*\ldots*((2n-3)/2n-2)\ 3^{n+1}/4n(n+1) \le 3^{n+2}/4n(n+1)$

יד. החסם בסעיף יג שואף ל-∞ .

טו. נחליף את הקטע [1,4] בקטע [1,1.96] . נקבל חסם חדש:

$|f-p_n| \le 3*0.96^{n+1}/4n(n+1) \le 3/4n(n+1)$

טז. נביט על אי השויון $3/4n(n+1) < 0.001$ השקול ל-$750 < n(n+1)$.
נציב כמה ערכים של n עד שנקבל: $26 < n$.

שאלה 3

הבט בפונקציה $f(x)=\sin(x)/x$ על הקטע [1,2]

בשלשת הסעיפים הבאים הנך מתבקש לחשב קרובים של האינטגרל. בכל התשובות, הבט על מספרים כמו $\sin(5)/5$ כעל תשובה מלאה-אין צורך לפתח אותם יותר.

א. חשב את סכום רימן המבוסס על 5 קטעים שוים, נקודת בינים בשמאל.

תשובה:

ב. חשב את סכום הטרפז המבוסס על 5 קטעים שוים.

תשובה:

ג. חשב את סכום סימפסון המבוסס על $m=4$ קטעים שוים גדולים, $n=8$ חצאי קטעים.

תשובה:

בסעיפים הבאים ד-יא תתבקש לחשב לחשב סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים של x^3 על הקטע $[1,5]$ בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n אבל לא יכיל סיגמא.

ד.   תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה.   תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו.   תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז.   תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ח. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ט. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:

$N=$

י. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

יא. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף י קטנה מ-0.001 .

תשובה:

$N=$

תשובה לשאלה 3

א.

$$SR=(1/5)[\sin(1)/1+\sin(1.2)/1.2+\sin(1.4)/1.4+\sin(1.6)/1.6+\sin(1.8)/1.8+\sin(2)/2)]$$

ב.

$$ST=(1/5)/2[\sin(1)/1+2\{\sin(1.2)/1.2+\sin(1.4)/1.4+\sin(1.6)/1.6+\sin(1.8)/1.8\}+\sin(2)/2].$$

ג.

$$Ssi=(1/8)/3[\sin(1)/1+\sin(2)/2+2\{\sin(1.25)/1.25+\sin(1.5)/1.5+\sin(1.75)/1.75\}+4\{\sin(1.125)/1.125+\sin(1.375)/1.375+\sin(1.625)/1.625+\sin(1.875)/1.875\}].$$

$$SR=\frac{4}{n}(\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{4k}{n})^3)=\frac{4}{n}(\sum_{k=0}^{n-1}(1+3\frac{4k}{n}+3\frac{16k^2}{n^2}+\frac{64k^3}{n^3})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4}{n}+\frac{48k}{n^2}+\frac{192k^2}{n^3}+\frac{256k^3}{n^4})=$$

$$=4+\frac{48}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}+\frac{192}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{256}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}=$$

$$=4+\frac{24(n-1)}{n}+\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{64(n-1)^2}{n^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}4+24+64+64=156=\int_1^5 x^3dx.$$

ד. 4 .

ה. 24(n-1)/n .

ו. $32(n-1)(2n-1)/n^2$.

ז. $64(n-1)^2/n^2$

$$E(SR) = 4 + 24 + 64 + 64 -$$

$$[4 + \frac{24(n-1)}{n} + \frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2} + \frac{64(n-1)^2}{n^2}] =$$

$$= 24[1 - \frac{(n-1)}{n}] + 32[2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}] + 64[1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}]$$

$$= \frac{24}{n} + \frac{32(3n-1)}{n^2} + \frac{64(2n-1)}{n^2} =$$

$$= \frac{8}{n^2}(3n + 4(3n-1) + 8(2n-1)) = \frac{8(31n-12)}{n^2} < \frac{248}{n}.$$

ח. $(248n-96)/n^2$

ט. הערכה גסה $248/n<1/1000$ גורר כי $n>248000$ ולכן $N=248000$.

י. $|ESR| \le 3\cdot 5^2\cdot 4^2/2n=600/n$

יא. $600/n<1/1000$ גורר $n>600000$ ולכן $N=600000$.