המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן אמצע בקורס מבוא לאנליזה נומרית</u>

יום ד, כב כסלו התש"ע, 9-12-2009 שעה 16.00 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה בטופס המבחן בלבד. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן שתי שאלות, שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 14 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

26*4=104

.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x-x_m)P_{m+1,n} - (x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a+h \le c_2 \le x_2 = a+2h \le \cdots x_n = a+nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_nf(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n|\leq M^n(b-a)$, $M=\sup g'(x)$, $a\leq x\leq b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p)=\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1}-L|\leq\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2$$

כאשר $M=\sup f''$, $m=\inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \ln(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(e), f(e^2)$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[e,e^2]$.

תשובה: $|f-p| \le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה: $|f-p| \le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p| \le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה: $|f-p| \le$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n-ית של f .

תשובה: $f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=e<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=e^2$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה: $|f- p_n| \le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד.

תשובה: $|f- p_n| \le$

יב. מהו הגבול של התשובה של סעיף יא כאשר n שואף לאינסוף?

שאלה 2

הבט בפונקציה $f = \ln(x)$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=e.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה $x=e^2$.

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f''. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה $a=e^2$.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה x=e .

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(e),f(e^2)$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

תשובות

תשובה לשאלה 1

א. ישר האינטרפולציה: $f(e)=1, f(e^2)=2$ $(x-e)(2-1)/(e^2-e)+1=(x+e^2-2e)/(e^2-e)$ ואכן אם נציב בו את $x=e,e^2$, נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .

דרך ראשונה

ב,ג. $R=f-p=\ln(x)-(x+e^2-2e)/(e^2-e)$. אז $R'=1/x-1(e^2-e)$. נמצא מתי $R'>0$. אז $x < e^2-e$.

בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצוות הקטע $f=0$ ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. השגיאה היא

$\ln(e^2-e)-(2e^2-3e)/(e^2-e)=\ln(e)+\ln(e-1)-(2e-3)/(e-1)=1+\ln(e-1)-2+1/(e-1)=$
$=\ln(e-1)-(e-2)/(e-1)\sim 0.1233$

דרך שניה

ד,ה. $f''=-1/x^2$. זוהי פונקציה עולה ושלילית בקטע $[e,e^2]$ ולכן ערך המקסימום שלה נמצא כאשר $x=e$ ושוה בערכו המוחלט $1/e^2$. לכן
$|f-p|\leq(x-e)(x-e^2)/(2!e^2)$.

ו,ז. נביט על $(x-e)(x-e^2)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר $x=(e^2+e)/2\sim 5.0536$. אז ערכה המוחלט הוא $(e^2-e)^2/4$ ולכן,
$|f-p|\leq((e^2-e)^2/4)(2e^2)=(e-1)^2/8\sim 0.36906$

דרך שלישית

ח. $|f-p|\leq(x-e)(x-e^2)/(2!e^2)=(e^2-e)^2/2e^2=(e-1)^2/2\sim 1.4762$.

ט,י. $f^{(n)}=((-1)^{n-1}(n-1)!)(x)^{-n}$.

עלינו להציב את הנגזרת ה-$(n+1)$. לכן נקבל:

$|f-p_n|\leq n!(x-e)\ldots(x-e^2))/(e^{n+1}(n+1)!)$

יא. נעריך $|x-a_i|\le(e^2-e)$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f-p_n|\le n!(e^2-e)^{n+1}/(e^{n+1}(n+1)!) = (e-1)^{n+1}/(n+1)$

.

יב. הבטוי האחרון שואף לאינסוף כאשר n שואף לאינסוף.

תשובה לשאלה 2

קודם נחשב שתי נגזרות ל-f.

$$f=\ln(x),\ f'=\frac{1}{x},\ f''=-\frac{1}{x^2}$$

א. ישר טיילור הוא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)=1+\frac{1(x-e)}{e}=\frac{x}{e}$$

ב. נציב בישר $x=e^2$ ונקבל את הערך $y=e^2/e=e=2.718$.

ג. השגיאה האמיתית היא $f(e^2)-e=2-2.718$.

ה. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n=1,\ 2-e=\frac{f''(c)(e^2-e)^2}{2!}.$$

ו.

$$2-e=\frac{f''(c)(e^2-e)^2}{2}\rightarrow f''(c)=\frac{2(2-e)}{(e^2-e)^2}\rightarrow\frac{-1}{c^2}=\frac{2(2-e)}{(e^2-e)^2}$$
$$\rightarrow c^2=\frac{(e^2-e)^2}{2(e-2)}\rightarrow c=\frac{(e^2-e)}{\sqrt{2(e-2)}}.$$

ז. ישר טיילור הוא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)=2+\frac{1}{e^2}(x-e^2)=\frac{x+e^2}{e^2}.$$

ח. נציב בישר x=e ונקבל את הערך $y=(e+e^2)/e^2=1+1/e$.

ט. השגיאה האמיתית היא $f(e)-(1+1/e)=-1/e$

י. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n=1,-\frac{1}{e}=\frac{f''(c)(e^2-e)^2}{2!}$$

יא.

$$-\frac{1}{e}=\frac{1(e^2-e)^2}{2}f''(c)\rightarrow f''(c)=-\frac{2}{e(e^2-e)^2}\rightarrow\frac{-1}{c^2}=-\frac{2}{e(e^2-e)^2}$$
$$\rightarrow c^2=\frac{e(e^2-e)^2}{2}\rightarrow c=\sqrt{\frac{e}{2}}(e^2-e).$$

יב. ישר האינטרפולציה הוא

$$y = \frac{(x-e)(2-1)}{(e^2-e)} + 1 = \frac{x+e^2-2e}{(e^2-e)}.$$

יג.

למשל נביט ב- ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\ln(3.65191048) = 1.295248.$$

בישר האינטרפולציה:

$$\frac{\frac{4e+e^2}{5}+e^2-2e}{(e^2-e)} = \frac{4e+e^2+5e^2-10e}{5(e^2-e)} = \frac{6e^2-6e}{5(e^2-e)} = \frac{6}{5} = 1.2.$$

$$|E| \sim 1.295248 - 1.2 = 0.095248.$$

בטיילור המשיך ב-a=e :

$$y=\frac{x}{e}=\frac{\frac{4e+e^2}{5}}{e}=\frac{4e+e^2}{5e}=\frac{4+e}{5}\sim\frac{6.781}{5}=1.356,|E|=1.356-1.295248=0.061$$

בטיילור המשיק ב-$a=e^2$:

$$y=\frac{x+e^2}{e^2}=\frac{\frac{4e+e^2}{5}+e^2}{e^2}=\frac{4e+6e^2}{5e^2}=\frac{4+6e}{5e}=1.2+\frac{0.8}{e}\sim 1.494334.$$

$$|E|=1.494334-1.295248=0.1991$$

יד.

למשל נביט ב-$x=(e+4e^2)/5\sim 6.4536192$ ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\ln(6.4536192)=1.864641.$$

בישר האינטרפולציה:

$$\frac{\frac{e+4e^2}{5}+e^2-2e}{(e^2-e)}=\frac{e+4e^2+5e^2-10e}{5(e^2-e)}=\frac{9e^2-9e}{5(e^2-e)}=\frac{9}{5}=1.8.$$

$$|E|\sim 1.864641-1.8=0.064641.$$

בטיילור המשיק ב-a=e :

$$y=\frac{x}{e}=\frac{\frac{e+4e^2}{5}}{e}=\frac{e+4e^2}{5e}=\frac{1+4e}{5}\sim 2.3744. |E|=2.3744-1.864641=0.508$$

בטיילור המשיק ב-$a=e^2$:

$$y=\frac{x+e^2}{e^2}=\frac{\frac{e+4e^2}{5}+e^2}{e^2}=\frac{e+9e^2}{5e^2}=\frac{1+9e}{5e}=1.8+\frac{0.2}{e}\sim 1.87358351.$$

$$|E|=1.8735-1.8646=0.0089$$