דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2},\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^3=n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!}+R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y=f(a)+\frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm=\begin{pmatrix}1 & a_0 & \cdots & a_0^n\\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n\\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}$$

$$\det(vdm)=\prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):
x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:
x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ד, כא איר התשס"ז 9-5-2007 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. המבחן ללא חומר עזר.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

הציון המקסימלי במבחן הוא 108 .

במבחן 2 שאלות.

שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 15 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \sin^2(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(0)=0, f(\pi/2)=1$. וסמן אותו p .

תשובה: p=

הערכת |f-p| בצורה ראשונה:

רמז: $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: a=

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע $[0,\pi/2]$.

תשובה: $|f-p| \le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:

$|f-p|\leq$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p|\leq$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:

$|f-p|\leq$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:

$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0<a_1<a_2<,\dots, <a_n=\pi/2$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה: $|f- p_n| \le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים (או שלש פעמים).

תשובה: $|f- p_n| \le$

יב. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f- p_n| \le 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f = \sqrt[3]{8+7x}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=0.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה x=8 .

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f'. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה $a=8$.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה $x=0$.

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(0)=2,f(8)=4$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

טו. מצא נקודה x שבה ישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר טיילור שמצאת בסעיף א.
תשובה:

תשובות

תשובה לשאלה 1

א. ישר האינטרפולציה: $(x-0)(1-0)/(\pi/2-0)+0=2x/\pi$ ואכן אם נציב בו את $x=0,\pi/2$ נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .

דרך ראשונה

ב,ג. $R=f-p=\sin^2(x)-(2x)/\pi$. אז $R'= 2\sin(x)\cos(x)-2/\pi=\sin(2x)- 2/\pi$.
נמצא מתי $R'>0$. אז $\sin(2x) <2/\pi$ או
$0<2x<\arcsin(2/\pi)=\arcsin(0.6366)=39.54^0=0.690rad$. ולכן
$0<x<19.77^0$
בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע f=0 ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $\sin(0.6366)-(2*0.6366)/\pi= 2/\pi-1.2732/\pi=0.7268/\pi=0.2313$

דרך שניה

ד,ה. $f''=2\cos(2x)$. זוהי פונקציה יורדת בקטע $[0,\pi/2]$ מהערך 1 לערך -1 ולכן הערך המוחלט המקסימלי שלה נמצא כאשר $x=0,\pi/2$ ושוה 2. לכן $|f-p|\leq 2(x-0)(x-\pi/2)/2!$.

ו,ז. נביט על $x(x-\pi/2)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר $x=\pi/4$. אז ערכה הוא $\pi^2/16$ ולכן, $|f-p|\leq(\pi^2/16)=0.616$

דרך שלישית

ח. $|f-p|\leq 1x(x-\pi/2)/2!\leq (\pi/2)*(\pi/2)/2=\pi^2/8=1.233$

ט,י. עבור $n>0$,

$f^{(n)}=2^{n-1}\sin(2x)$, $n=1 \pmod 4$, $=2^{n-1}\cos(2x)$, $n=2 \pmod 4$,
$=-2^{n-1}\sin(2x)$, $n=3 \pmod 4$, $=-2^{n-1}\cos(2x)$, $n=4 \pmod 4$.

עלינו להציב את הנגזרת ה-$(n+1)$. לכן נקבל:

$|f-p_n|\le 2^n (x-0)(x-a_1)\ldots(x-\pi/2)/(n+1)!$

יא. נעריך $|x-ai|\le\pi/2$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f-p_n|\le 2^n (\pi/2)^{n+1}/(n+1)! = \pi^{n+1}/2(n+1)!$ . .

יב. נביט על אי השויון $\pi^{n+1}/2(n+1)! \le 0.001$ נציב כמה ערכים ונמצא כי $n+1=13$ כלומר $n=12$ הוא פתרון.

תשובה לשאלה 2

קודם נחשב שתי נגזרות ל-f.

$$f=\sqrt[3]{8+7x},\ f'=\frac{7}{3(\sqrt[3]{8+7x})^2},\ f''=\frac{-98}{9(\sqrt[3]{8+7x})^5}$$

א. ישר טיילור הוא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)=2+{}^{7}\!/\!_{12}(x-0)=2+{}^{7x}\!/\!_{12}$$

ב. נציב בישר x=8 ונקבל את הערך y=20/3.

ג. השגיאה האמיתית היא f(8)-p(8)=4-20/3=-8/3.

ה. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n=1,4-{}^{20}\!/_{3}=\frac{f''(c)(8-0)^2}{2!}=32f''(c)$$

ו.

$$-{}^{8}\!/_{3}=32f''(c)\to f''(c)=-{}^{1}\!/_{12}\to\frac{-98}{9(\sqrt[3]{8+7c})^5}=\frac{-1}{12}$$
$$\to(\sqrt[3]{8+7c})^5=130.666\to\sqrt[3]{8+7c}=2.6499$$
$$\to 8+7c=18.6075\to c=1.515359$$

ז. ישר טיילור הוא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)=4+\frac{7}{48}(x-8).$$

ח. נציב בישר x=0 ונקבל את הערך y=4-7/6=17/6.

ט. השגיאה האמיתית היא f(0)-p(0)=2-17/6=-5/6

י. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n=1,2-{}^{17}\!/_{6}=\frac{f''(c)(0-8)^2}{2!}=32f''(c)$$

יא.

$$-{}^{5}\!/_{6}=32f''(c)\rightarrow f''(c)=-{}^{5}\!/_{192}\rightarrow\frac{-49}{9(\sqrt[3]{8+7c})^5}=\frac{-5}{192}$$

$$\rightarrow(\sqrt[3]{8+7c})^5=\frac{192\cdot 49}{5\cdot 9}=209.0666\rightarrow 8+7c=24.670098\rightarrow c=2.38144$$

יב. ישר האינטרפולציה הוא

$$\frac{y-2}{x-0}=\frac{4-2}{8-0}\rightarrow y-2=0.25x\rightarrow y=0.25x+2.$$

יג.

למשל נביט ב-x=1 ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt[3]{15} = 3.1622 = 2.4662$$

בישר האינטרפולציה:

$$0.25(1) + 2 = 2.25, |E| = 2.466 - 2.25 = 0.21$$

בטיילור המשיק ב-a=0 :

$$2 + 7/12 = 2.583, |E| = 2.583 - 2.466 = 0.12$$

בטיילור המשיק ב-a=8 :

$$4 - \frac{49}{48} = \frac{143}{48} = 2.979, |E| = 2.979 - 2.466 = 0.51$$

יד.

למשל נביט ב-x=7 ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt[3]{57} = 3.84$$

בישר האינטרפולציה:

$$0.25(7) + 2 = 3.75, |E| = 3.84 - 3.75 = 0.09$$

בטיילור המשיק ב-a=0 :

$$2 + {}^{49}\!/_{12} = 6.083, |E| = 6.803 - 3.84 = 2.96$$

בטיילור המשיק ב-a=8 :

$$4 - \frac{7}{48} = \frac{185}{48} = 3.8541, |E| = 3.8541 - 3.84 = 0.01$$

טו.

למשל נביט ב-x=2 ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt[3]{22} = 2.802$$

בישר האינטרפולציה:

$$0.25(2) + 2 = 2.5, |E| = 2.802 - 2.5 = 0.302$$

בטיילור המשיק ב-a=0 :

$$2 + {}^{7}\!/_{6} = 3.166, |E| = 3.166 - 2.802 = 0.364$$

בטיילור המשיק ב-a=8 :

$$4 - \frac{7}{8} = 3.125, |E| = 3.125 - 2.802 = 0.323$$