NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

<u>מבחן אמצע בקורס מבוא לאנליזה נומרית</u>

יום ד, ג טבת התשס"ח, 12-12-2007 שעה 16.00 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה בשאלון בלבד. התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.

  מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן שתי שאלות, שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 14 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

26*4=104

.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_nf(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n|\le M^n(b-a),\ M=\sup g'(x),\ a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p)=\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1}-L|\le\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2$$

כאשר $M=\sup f''$, $m=\inf f'$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \cos(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(0)=1, f(\pi/2)=0$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[0,\pi/2]$.

תשובה: $|f-p| \le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה: $|f-p| \le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p| \le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה: $|f-p|\leq$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n-ית של f .

תשובה: $f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=\pi/2$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי c(x)).

תשובה: $|f- p_n|\leq$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים.

תשובה: $|f- p_n|\leq$

יב. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f- p_n|\leq 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f=\sqrt[3]{x+1}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=0.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה x=7 .

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f''. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=7.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה x=0 .

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(0)=1, f(7)=2$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

תשובות

תשובה לשאלה 1

א. ישר האינטרפולציה: $(x-0)(0-1)/(\pi/2-0)+0=(\pi-2x)/\pi$ ואכן אם נציב בו את $x=0,\pi/2$ נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .

דרך ראשונה

ב,ג. $R=f-p=\cos(x)-(\pi-2x)/\pi$. אז $R'= -\sin(x) +2/\pi$. נמצא מתי $R'>0$. אז $\sin(x) <2/\pi$ או $0<x<\arcsin(2/\pi)=\arcsin(0.6366)=39.6^0=0.691rad$.
בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע $f=0$ ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $\cos(0.691)-1+(2*0.691)/\square=0.771-0.560=0.211$

דרך שניה

ד,ה. $f''=-\cos(x)$. זוהי פונקציה עולה ושלילית בקטע $[0,\square/2]$ ולכן ערך המקסימום שלה נמצא כאשר $x=0$ ושוה בערכו המוחלט 1. לכן
$|f-p|\le 1(x-0)(x-\square/2)/2!$.

ו,ז. נביט על $x(x-\square/2)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר $x=\square/4$.
אז ערכה הוא $\square^2/16$ ולכן, $|f-p|\le(\square^2/16)/2=\square^2/32=0.308$

דרך שלישית

ח. $|f-p|\le 1x(x-\square/2)/2!\le (\square/2)*(\square/2)/2=\square^2/8=1.233$

ט,י. $f^{(n)}=\cos(x), n=0 \pmod 4, =-\sin(x), n=1 \pmod 4, =-\cos(x),n=2 \pmod 4, =\sin(x), n=3 \pmod 4$.

עלינו להציב את הנגזרת ה-$(n+1)$. לכן נקבל:

$|f- p_n|\le 1(x-0)(x-a_1)\ldots(x-\square/2)/(n+1)!$

יא. נעריך $|x-a_i|\le\square/2$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f- p_n|\le(\square/2)^{n+1}/(n+1)!$.

יב. נביט על אי השויון $(\square/2)^{n+1}/(n+1) \le 0.001$ נציב כמה ערכים ונמצא כי $n+1=8$ כלומר $n=7$ הוא פתרון.

תשובה לשאלה 2

קודם נחשב שתי נגזרות ל-f.

$$f=(x+1)^{\frac{1}{3}},\ f'=\frac{(x+1)^{-\frac{2}{3}}}{3},\ f''=-\frac{2(x+1)^{-\frac{5}{3}}}{9}$$

א. ישר טיילור הוא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)=1+\frac{x-0}{3}=\frac{x+3}{3}$$

ב. נציב בישר $x=7$ ונקבל את הערך $y=10/3$.

ג. השגיאה האמיתית היא $f(7)-10/3=2-3=-4/3$.

ה. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n=1,\ 2-\frac{10}{3}=\frac{f''(c)(7-0)^{2}}{2!}=24.5f''(c)$$

ו.

$$-\frac{4}{3}=24.5f''(c)\to f''(c)=\frac{-8}{147}\to\frac{-2}{9\sqrt[3]{c+1}^{5}}=\frac{-8}{147}$$

$$\to\sqrt[3]{c+1}^{5}={}^{147}\!/\!_{36}\to(c+1)^{5}=\frac{3176523}{46656}=68.08391$$

$$\to c+1=2.32599\to c=1.32599$$

ז. ישר טיילור הוא:

$$f(a)+f'(a)(x-a)=2+\frac{1}{12}(x-7)=\frac{x+17}{12}.$$

ח. נציב בישר x=0 ונקבל את הערך y=17/12=1.416.

ט. השגיאה האמיתית היא f(0)- 17/12=1-17/12=-5/12

י. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n=1,-\frac{5}{12}=\frac{f''(c)(0-7)^{2}}{2!}=24.5f''(c)$$

יא.

$$-\frac{5}{12}=\frac{49}{2}f''(c)\rightarrow f''(c)=-\frac{5}{294}\rightarrow\frac{-2}{9(c+1)^{5/3}}$$

$$\rightarrow(c+1)^{5/3}=\frac{196}{15}\rightarrow(c+1)^{5}=\frac{7529536}{3375}=2230.973$$

$$\rightarrow c+1=4.67410\rightarrow c=3.67410$$

יב. ישר האינטרפולציה הוא

$$\frac{(x-0)(2-1)}{7-0}+1=\frac{x-0}{7}+1\rightarrow y=\frac{x+7}{7}.$$

יג.

למשל נביט ב-x=0.331 ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt[3]{1+0.331}=\sqrt[3]{1.331}=1.1$$

בישר האינטרפולציה:

$$\frac{7+0.331}{7}=\frac{7.331}{7}=1.047,|E|=0.063$$

בטיילור המשיק ב-a=0 :

$$\frac{0.331+3}{3}=1.1103, |E|=0.0103$$

בטיילור המשיך ב-a=7 :

$$\frac{0.331+17}{12}=1.44425, |E|=0.34425$$

יד.

למשל נביט ב-x=5.859 ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt[3]{1+5.859}=\sqrt[3]{6.859}=1.9$$

בישר האינטרפולציה:

$$\frac{7+5.859}{7}=\frac{12.859}{7}=1.837, |E|=0.063$$

בטיילור המשיך ב-a=0 :

$$\frac{5.859+3}{3} = 2.953, |E| = 1.053$$

בטיילור המשיך ב-a=7 :

$$\frac{5.859+17}{12} = 1.90491, |E| = 0.00491$$