דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right),\ h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$.
הדבר נקבע כך ש $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):
x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:
x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ו, ה טבת התשס"ה 17-12-2004 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן הציון המקסימלי הוא 80 .

במבחן 3 שאלות. שאלה 1 בת 9 סעיפים, 2 בת 13 סעיפים ו-3 בת 16 סעיפים.

שאלה 1 סעיף 9 שוה 6 נקודות.

כל סעיף אחר שוה 2 נקודות, סה"כ 2x37=74 , 74+6=80 .

בהצלחה.

טור-- א

1 . הבט בפונקציה $f(x)=e^{(x^2)}$.

א. חשב את $f(0)$. תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$. תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$. תשובה:
ד. חשב את $f'''(0)$. תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$. תשובה:

ו. חשב את $f^{(5)}(0)$. תשובה:

ז. חשב את $f^{(6)}(0)$. תשובה:

ח. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 6 כולל.

תשובה:

ט. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

תשובה לשאלה 1 טור א

$f(x)=e^{(x^2)}$. נגזר ונקבל $f'=2xf$. נגזר ונקבל $f''=2f+4x^2f$. נגזר ונקבל
$f'''=4xf+8xf+8x^3f=12xf+8x^3f$. נגזר ונקבל
$f^{(4)}(x)=12f+24x^2f+24x^2f+16x^4f=12f+48x^2f+16x^4f$. וכן:
$f^{(5)}(x)=24xf+96xf+96x^3f+64x^3f+32x^5f=120xf+160x^3f+32x^5f$.
$f^{(6)}(x)=120f+240x^2f+480x^2f+320x^4f+160x^4f+64x^6f$
$=120f+720x^2f+480x^4f+64x^6f$
נזכר כי $f(0)=1$ נציב ונקבל: $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=12,$
$f^{(5)}(0)=0, f^{(6)}(0)=120$ ולכן נקבל חלק מטור מקלורן:

$$f\sim 1+2x^2/2+12x^4/24+120x^6/720+\ldots=1+x^2+x^4/2+x^6/6+\ldots=$$
$$1+(x^2)+(x^2)^2/2+(x^2)^3/6+\ldots$$

נשים לב כי זהו טור מקלורן של e^x כאשר במקום המשתנה x מציבים x^2 .
לכן נקבל את הטור כלו: לכן נקבל את ההצגה:

$$f \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!}$$

טור-- ב

1 . הבט בפונקציה $f(x)=e^{-(x^2)}$.

א. חשב את $f(0)$. תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$. תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$. תשובה:

ד. חשב את $f'''(0)$. תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$. תשובה:

ו. חשב את $f^{(5)}(0)$. תשובה:

ז. חשב את $f^{(6)}(0)$. תשובה:

ח. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 6 כולל.

תשובה:

ט. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

תשובה לשאלה 1 טור ב

נגזר ונקבל . $f''=-2f+4x^2f$ נגזר ונקבל . $f'=-2xf$ נגזר ונקבל $f(x)=e^{-(x^2)}$.
נגזר ונקבל .$f'''=4xf+8xf-8x^3f=12xf-8x^3f$
ולכן: . $f^{(4)}(x)=12f-24x^2f-24x^2f+16x^4f=12f-48x^2f+16x^4f$
. $f^{(5)}(x)=-24xf-96xf+96x^3f+64x^3f-32x^5f=-120xf+160x^3f-32x^5f$
$f^{(6)}(x)=-120f+240x^2f+480x^2f-320x^4f-160x^4f+64x^6f=-120f+720x^2f-480x^4f+64x^6f$
נזכר כי $f(0)=1$ נציב ונקבל: $f(0)=1,f'(0)=0,f''(0)=-2,f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=12,$ $f^{(5)}(0)=0, f^{(6)}(0)=-120$ ולכן נקבל חלק מטור מקלורן:

$f\sim 1-2x^2/2+12x^4/24-120x^6/720+\ldots=1-x^2+x^4/2-x^6/6+\ldots=1-(x^2)+(x^2)^2/2-(x^2)^3/6+\ldots$

נשים לב כי זהו טור מקלורן של e^x כאשר במקום המשתנה x מציבים $-x^2$. לכן נקבל את הטור כלו: לכן נקבל את ההצגה:

$$f\approx\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{k!}$$

טור א

2. הבט בפונקציה

$$f=\sqrt[3]{x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(1)=1,f(8)=2$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

ב. חקור את $f\text{-}p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f\text{-}p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f\text{-}p$ בקטע $[1,8]$.

תשובה: $|f\text{-}p|\leq$.

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f\text{-}p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:

$|f\text{-}p|\leq$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f\text{-}p|$ על ידי קבוע.

תשובה:

$|f\text{-}p|\leq$

ח. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:

$f^{(n)}=$

ט. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=1<a_1<a_2<,\ldots,<a_n=8$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f\text{-}p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f- p_n| \le$

י. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f- p_n| \le$

יא. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f- p_n| \le$

יב. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\ldots, a_n=8$ משתנה לנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\ldots, a_n=1.728$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f- p_n| \le$

יג. מצא N כך ש-עבור $n>N$ מתקיים כי $|f- p_n|\le 0.001$

תשובה לשאלה 2 טור א

א. ישר האינטרפולציה הוא $(x-1)/(8-1)+1=(x-1)/7+1=(x+6)/7$ ואכן אם נציב בו את $x=1,8$ נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .

ב,ג. $R=f-p=x^{(1/3)}-(x+6)/7$. אז $R'= x^{(-2/3)}/3-1/7$. נמצא מתי $R'>0$. אז $x^{(-2/3)}/3-1/7>0$ או $x^{(-2/3)}>3/7$ או $x^{(2/3)}<7/3$ או $x<(7/3)^{(3/2)}$ או $1<x<3.56$. בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע $f=0$

ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $(7/3)^{(1/2)}-((7/3)^{(3/2)}+6)/7\sim1.526-1.367=0.159$

ד,ה. $f''=(-2/9)x^{(-5/2)}$. זוהי פונקציה יורדת בקטע [1,8] ולכן ערך המקסימום שלה נמצא כאשר $x=1$ ושוה בערכו המוחלט 2/9 . לכן $|f-p|\leq(2/9)(x-1)(x-8)/2!$.

ו,ז. נביט על $(x-1)(x-8)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר $x=9/2$. אז ערכה הוא $(-49)/4$ ולכן, $|f-p|\leq(2/9)(49/4)/2=(49/36)\sim1.36$

ח,ט. $f^{(n)}=(-1)^{(n+1)}1*2*5*\ldots*(3n-4)x^{-(3n-4/3)}/3^n$. עלינו להציב את הנגזרת ה-$(n+1)$. כמו כן, כל חזקה שלילית של x היא פונקציה יורדת בקטע [1,8] ולכן ערכה המוחלט המקסימלי הוא 1 . לכן נקבל:

$|f-p_n|\leq1*5*8*\ldots*(3n-1)(x-1)(x-a1)\ldots(x-8)/3^{n+1}(n+1)!$

י, יא נעריך $|x-ai|\leq7$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f-p_n|\leq1*5*8*\ldots(3n-1)*7^{n+1}/3^{n+1}(n+1)!$.

כדי להעריך בטוי זה כך שיופיעו בו פחות n ים, נכתב חלק מהמונה והמכנה כך:

$|f-p_n|\leq1*(5/2*3)*(8/3*3)*\ldots*((3n-1)/3n)7^{n+1}/3(n+1)$. נשים לב כי כל השברים הפשוטים הם כמעט שוים ל-1 וכן מכפלתם, ולכן נוכל לרשום במקום אי השויון הקודם, את אי השויון הבא, שהוא מדויק פחות אך גם מסבך פחות:

$|f-p_n|\leq7^{n+1}/3(n+1)$

יב. אם הקטע השתנה ל [1,1.728] , אז נעריך $|x-ai|\leq0.728$ ולכן נקבל את הבטוי:

$|f-p_n|\leq(0.728)^{n+1}/3(n+1)$

יג. נביט על אי השויון $(0.728)^{n+1}/3(n+1) \leq 0.001$ השקול ל-
$1000/3 \leq (n+1)/(0.728)^{n+1} = (n+1)(1.37..)^{n+1}$. נציב כמה ערכים של n עד שנקבל: $11 \leq n+1$ $10 \leq n$.

טור ב

2. הבט בפונקציה

$$f = \sqrt[3]{x^2}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(1)=1, f(8)=4$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע [1,8].

תשובה: $|f-p| \leq$.

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$
.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את |f-p| כפונקציה של x בלבד (בלי c(x)).

תשובה:
$|f-p| \leq$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע.

תשובה:
$|f-p|\le$

ח.   כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

ט. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=1<a_1<a_2<,\dots,<a_n=8$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f-p_n|\le$

י. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f-p_n|\le$

יא.   פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f-p_n|\le$

יב. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\ldots, a_n=8$ משתנה לנתון
$a_0=1,a_1=,a_2=,\ldots, a_n=1.728$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת
ההנחות החדשות:

תשובה: $|f-$
$p_n|\leq$

יג. מצא N כך ש-עבור $n>N$ מתקיים כי $|f- p_n|\leq 0.001$

תשובה לשאלה 2 טור ב

א. ישר האינטרפולציה הוא
$3(x-1)/(8-1)+1=3(x-1)/7+1=(3x+4)/7$ ואכן אם נציב בו את $x=1,8$ נקבל
את אותם ערכים כמו ב-f .

ב,ג. $R=f-p=x^{(2/3)}-(3x+4)/7$. אז $R'= 2x^{(-1/3)} /3-3/7$. נמצא מתי $R'>0$.
אז $2x^{(-1/3)} /3-3/7>0$ או $x^{(-1/3)} >9/14$ או $x^{(1/3)} <14/9$ או $x<(14/9)^3$
או $1<x<3.76$. בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע $f=0$
ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $(14/9)^2-(3$
$(14/9)^3+4)/7\sim 3.16-2.184=0.9758$

ד,ה. $f''=(-2/9)x^{(-4/2)}$. זוהי פונקציה יורדת בקטע [1,8] ולכן ערך המקסימום
שלה נמצא כאשר $x=1$ ושוה בערכו המוחלט 2/9 . לכן
$|f-p|\leq(2/9)(x-1)(x-8)/2!$.

ו,ז. נביט על $(x-1)(x-8)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא
כאשר $x=9/2$. אז ערכה הוא $(-49)/4$ ולכן, $|f-$
$p|\leq(2/9)(49/4)/2=(49/36)\sim 1.36$

ח.ט. $f^{(n)}=(-1)^{(n+1)}1*1*4*\ldots*(3n-5)x^{-(3n-5/3)}/3^n$. עלינו להציב את הנגזרת
ה-$(n+1)$. כמו כן, כל חזקה שלילית של x היא פונקציה יורדת בקטע [1,8]
ולכן ערכה המוחלט המקסימלי הוא 1 . לכן נקבל:

$|f-p_n|\le 1*4*7*\ldots*(3n-2)(x-1)(x-a1)\ldots(x-8)/3^{n+1}(n+1)!$

י, יא נעריך $|x-ai|\le 7$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f-p_n|\le 1*4*7*\ldots(3n-2)*7^{n+1}/3^{n+1}(n+1)!$.

כדי להעריך בטוי זה כך שיופיעו בו פחות n ים, נכתב חלק מהמונה והמכנה כך:

$|f-p_n|\le 1*(4/2*3)*(7/3*3)*\ldots*((3n-2)/3n)7^{n+1}/3(n+1)$. נשים לב כי כל השברים הפשוטים הם כמעט שוים ל-1 וכן מכפלתם, ולכן נוכל לרשום במקום אי השויון הקודם, את אי השויון הבא, שהוא מדויק פחות אך גם מסבך פחות:

$|f-p_n|\le 7^{n+1}/3(n+1)$

יב. אם הקטע השתנה ל $[1,1.728]$, אז נעריך $|x-ai|\le 0.728$ ולכן נקבל את הבטוי:

$|f-p_n|\le (0.728)^{n+1}/3(n+1)$

יג. נביט על אי השויון $(0.728)^{n+1}/3(n+1)\le 0.001$ השקול ל-
$1000/3\le(n+1)/(0.728)^{n+1}=(n+1)\ (1.37..)^{n+1}$. נציב כמה ערכים של n עד שנקבל: $11\le n+1$ $10\le n$.

שאלה 3 טור א

הבט בפונקציה $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ על הקטע $[1,2]$

א. חשב את האינטגרל של f בקטע.

תשובה:

ב. חשב את סכום רימן של אותו אינטגרל בהנחה כי הקטע חולק ל-n קטעים שוים.

תשובה:

ג. עבור התשובה בסעיף הקודם, מצא את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. מצא N כך עבור n>N מתקיים כי השגיאה בפועל קטנה מ-0.001 .

תשובה:

ה. חשב את הערכת השגיאה לפי נוסחת השארית:

תשובה:

ו. מצא N כך עבור n>N מתקיים כי הערכת השגיאה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

ז. חשב קרוב לאינטגרל בהנחה כי הקטע חולק ל-n קטעים שוים, ובכל אחד השתמשנו בטרפז.

תשובה:

ח. עבור התשובה בסעיף הקודם, מצא את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ט. מצא N כך עבור n>N מתקיים כי השגיאה בפועל קטנה מ-0.001 .

תשובה:

י. חשב את הערכת השגיאה לפי נוסחת השארית:

תשובה:

יא. מצא N כך עבור n>N מתקיים כי הערכת השגיאה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

שים לב כי עתה f **שונתה** להיות $f(x)=4x^3$ על אותו קטע.

יב. חשב קרוב לאינטגרל בהנחה כי הקטע חולק ל-2n קטעים שוים, ובכל זוג השתמשנו בפרבולה (שיטת סימפסון).

תשובה:

יג. עבור התשובה בסעיף הקודם, מצא את השגיאה האמיתית.

תשובה:

יד. מצא N כך עבור n>N מתקים כי השגיאה בפועל קטנה מ-0.001 .

תשובה:

טו. חשב את הערכת השגיאה לפי נוסחת השארית:

תשובה:

טז. מצא N כך עבור n>N מתקים כי הערכת השגיאה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

תשובה לשאלה 3 טור א

א. הקדומה היא $F(x)=x^4+x^3+x^2+x$. לכן האינטגרל הוא $F(2)-F(1)=26$.

ב.

$$SR=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(4(1+\frac{k}{n})^3+3(1+\frac{k}{n})^2+2(1+\frac{k}{n})+1)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4}{n^3}(n+k)^3+\frac{3}{n^2}(n+k)^2+\frac{2}{n}(n+k)+1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4}{n^4}(n^3+3n^2k+3nk^2+k^3)+\frac{3}{n^3}(n^2+2nk+k^2)+\frac{2}{n^2}(n+k)+\frac{1}{n})=$$

$$=4+\frac{12n^3(n-1)}{n^4 2}+\frac{12n(n-1)n(2n-1)}{6n^4}+\frac{4(n-1)^2n^2}{n^4 4}$$

$$+3+\frac{6n(n-1)n}{n^3 2}+\frac{3(n-1)n(2n-1)}{n^3 6}+2+\frac{2(n-1)n}{n^2 2}+1=$$

$$=10+\frac{6(n-1)}{n}+\frac{2(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{3(n-1)}{n}$$

$$+\frac{3(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{(n-1)}{n}=$$

$$=10+\frac{10(n-1)}{n}+\frac{5(n-1)(2n-1)}{2n^2}+\frac{(n-1)^2}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}26$$

ג.

$$E=26-[10+\frac{10(n-1)}{n}+\frac{5(n-1)(2n-1)}{2n^2}+\frac{(n-1)^2}{n^2}]=$$

$$10[1-\frac{(n-1)}{n}]+5[1-\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}]+1-\frac{(n-1)^2}{n^2}=$$

$$\frac{10}{n}+5[\frac{3n-1}{2n^2}]+\frac{2n-1}{n^2}=\frac{20n+15n-5+4n-2}{2n^2}=\frac{39n-7}{2n^2}$$

ד.

$$\frac{39n-7}{2n^2} < 0.001 \Leftrightarrow 500(39n-7) < n^2 \Leftrightarrow$$
$$0 < n^2 - 19500n + 3500 \Leftrightarrow$$
$$n = \frac{19500 \pm \sqrt{380250000 - 14000}}{2} \Leftrightarrow$$
$$n = \frac{19500 \pm \sqrt{380236000}}{2} = \frac{19500 \pm 19499.6410}{2}$$

כלומר אי השויון מתקים עבור n>19500 .

ה.

$$E = \frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n} = \frac{(12c(x)^2 + 6c(x) + 2)(2-1)^2}{2n} =$$
$$\frac{12c(x)^2 + 6c(x) + 2}{2n}$$

נשים לב כי f''=24x+6 חיובית בקטע, ולכן 'f עולה, ולכן 'f חסומה על ידי f'(2)=48+12+2=62. לכן E≤62/(2n)=31/n.

ו. נקבל 31000<n ⇐62/(2n)<0.001, כלומר קבלנו הערכה הרבה פחות טובה.

ז.

$$ST=\frac{1}{2n}(f(1)+f(2)+2\sum_{k=1}^{n-1}(4(1+\frac{k}{n})^3+3(1+\frac{k}{n})^2+2(1+\frac{k}{n})+1))=$$

$$=\frac{1}{2n}(10+49+\sum_{k=1}^{n-1}2(\frac{4}{n^3}(n+k)^3+\frac{3}{n^2}(n+k)^2+\frac{2}{n}(n+k)+1))=$$

$$=\frac{59}{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{4}{n^4}(n^3+3n^2k+3nk^2+k^3)+\frac{3}{n^3}(n^2+2nk+k^2)+\frac{2}{n^2}(n+k)+\frac{1}{n})=$$

$$=\frac{59}{2n}+4-\frac{4}{n}+\frac{12n^3(n-1)}{n^4 2}+\frac{12n(n-1)n(2n-1)}{6n^4}+\frac{4(n-1)^2n^2}{n^4 4}$$

$$+3-\frac{3}{n}+\frac{6n(n-1)n}{n^3 2}+\frac{3(n-1)n(2n-1)}{n^3 6}+2-\frac{2}{n}+\frac{2(n-1)n}{n^2 2}+1-\frac{1}{n}=$$

$$=10+\frac{39}{2n}+\frac{6(n-1)}{n}+\frac{2(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{3(n-1)}{n}$$

$$+\frac{3(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{(n-1)}{n}=$$

$$=10+\frac{39}{2n}+\frac{10(n-1)}{n}+\frac{5(n-1)(2n-1)}{2n^2}+\frac{(n-1)^2}{n^2}=$$

$$\frac{20n^2+39n+20n^2-20n+10n^2-15n+5+2n^2-4n+2}{2n^2}$$

$$=\frac{52n^2+7}{2n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}26$$

ח.

$$E=\frac{52n^2+7}{2n^2}-26=\frac{7}{2n^2}.$$

ט. $7/(2n^2)<0.001\Rightarrow 3500<n^2\Rightarrow 59.1<n\Rightarrow 60\le n$

י.

$$E=\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}=\frac{(24c(x)+6)(2-1)^3}{12n^2}=$$
$$=\frac{(24c(x)+6)}{12n^2}=\frac{(4c(x)+1)}{2n^2}$$

יא.

המונה בבטוי האחרון עולה ומקבל את ערך המקסימום שלו כאשר c(x)=2 .

לכן נקבל $E\le 9/(2n^2)<0.001\Rightarrow 4500<n^2\Rightarrow 67.08<n\Rightarrow 68\le n$

יב.

$$SSi=\frac{1}{6n}(f(1)+f(2)+2\sum_{k=1}^{n-1}4(1+\frac{2k}{2n})^3+4\sum_{k=0}^{n-1}4(1+\frac{2k+1}{2n})^3)=$$
$$=\frac{1}{6n}(4+32+\sum_{k=1}^{n-1}2\frac{4}{8n^3}(2n+2k)^3+\sum_{k=0}^{n-1}4\frac{4}{8n^3}(2n+2k+1)^3)=$$
$$=\frac{36}{6n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3n^4}(n+k)^3+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3n^4}(2n+2k+1)^3=$$
$$=\frac{36}{6n}+\frac{4}{3n^4}(\frac{(2n-1)^2(2n)^2}{4}-\frac{n^2(n+1)^2}{4})+\frac{1}{3n^4}((2n)^2(2(2n)^2-1)-(n^2(2n^2-1))=$$
$$=\frac{6}{n}+\frac{1}{3n^4}((2n-1)^2(2n)^2-n^2(n+1)^2)+\frac{1}{3n^4}((2n)^2(2(2n)^2-1)-(n^2(2n^2-1))=$$
$$=\frac{6}{n}+\frac{1}{3n^2}((2n-1)^2(2)^2-(n+1)^2)+\frac{1}{3n^2}((2)^2(2(2n)^2-1)-((2n^2-1))=$$
$$=\frac{1}{3n^2}(18n+4(4n^2-4n+1)-(n^2+2n+1)+32n^2-4-2n^2+1)=$$
$$=\frac{1}{3n^2}(45n^2)=15=\int_1^2 4x^3dx$$

יג.

השגיאה האמיתית היא 0 .

יד. לכל n>0 השגיאה תהיה קטנה מ- 0.001 .

טו. כיון ש-$f''''=0$ נוסחת הערכת השגיאה צופה כי היא תהיה 0 .

טז. ל$n>0$ השגיאה תהיה קטנה מ- 0.001 .