דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):
x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:
x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ה, כח כסלו התשס"ו 29-12-2005 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן הציון המקסימלי הוא 108 .

במבחן 4 שאלות.

שאלה 1 בת 14 סעיפים, 2 בת 8 סעיפים

כל סעיף שוה 22 נקודות סה"כ 88 נקודות..

שאלה 3 ושאלה 4 שוות 10 נקודות כל אחת .

בהצלחה.

שאלה 1

טור א

הבט בפונקציה

$$f=\sqrt{x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(4)=2, f(16)=4$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע [4,16].

תשובה: $|f-p|\leq$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:
$|f-p|\le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p|\le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:
$|f-p|\le$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=4<a_1<a_2<,\ldots,<a_n=16$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה:
$|f-p_n|\le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f-p_n| \leq$

יב. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f-p_n| \leq$

יג. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=4,a_1=,a_2=,\ldots,\ a_n=12$ משתנה לנתון $a_0=4,a_1=,a_2=,\ldots,\ a_n=5.76$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f-p_n| \leq$

יד. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n| \leq 0.001$

תשובה לשאלה 1 טור א

א. ישר האינטרפולציה: $(x-4)(4-2)/(16-4)+2=(x-4)/6+2= (x+8)/6$ ואכן אם נציב בו את $x=4,16$ נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .
דרך ראשונה

ב,ג. $R=f-p=x^{(1/2)}-(x+8)/6$. אז $R'= x^{(-1/2)}/2-1/6$. נמצא מתי $R'>0$. אז $x^{(-1/2)}/2-1/6>0$ או $2x^{(1/2)}<6$ או $x^{(1/2)}<3$ או $2<x<9$. בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע f=0 ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $(9)^{(1/2)}-(9+8)/6=1/6\sim0.1666$

דרך שניה

ד,ה. $f'=(-1/4)x^{(-3/2)}$. זוהי פונקציה יורדת בקטע [4,16] ולכן ערך המקסימום שלה נמצא כאשר $x=4$ ושוה בערכו המוחלט 1/32 . לכן $|f-p|\le(1/32)(x-4)(x-16)/2!$.

ו,ז. נביט על $(x-4)(x-16)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר $x=10$. אז ערכה הוא 36 ולכן, $|f-p|\le(1/32)(36)/2=(36/64)=9/16\sim0.5625$

דרך שלישית

ח. $|f-p|\le(1/32)(x-4)(x-16)/2!\le(1/32)(12)(12)/2=144/64=9/4=2.25$

ט,י. $f^{(n)}=(-1)^{(n+1)}1*3*5*...*(2n-3)x^{-(2n-1/2)}/2^n$. עלינו להציב את הנגזרת ה-$(n+1)$. כמו כן, כל חזקה שלילית של x היא פונקציה יורדת בקטע [4,16] וערכה המוחלט המקסימלי הוא $1/2^{2n+1}$. לכן נקבל:

$|f-p_n|\le1*3*5*...*(2n-1)(x-4)(x-a1)...(x-16)/2^{2n+1}(n+1)!$

יא,יב נעריך $|x-ai|\le12$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f-p_n|\le1*3*5*...(2n-1)*12^{n+1}/2^{2n+1}(n+1)!$.

כדי להעריך בטוי זה כך שיופיעו בו פחות n ים, נכתב חלק מהמונה והמכנה כך:

$|f-p_n|\le(1/2)*(3/4)*(5/3*2)*...*((2n-1)/2n)12^{n+1}/2^{n+1}(n+1)$. נשים לב כי כל השברים הפשוטים הם כמעט שוים ל-1 וכן מכפלתם, ולכן נוכל לרשום במקום אי השויון הקודם, את אי השויון הבא, שהוא מדויק פחות אך גם מסבך פחות:

$|f-p_n|\le6^{n+1}/(n+1)$

יג. אם הקטע השתנה ל $[4,5.76]$, אז נעריך $|x-a_i|\le 1.76$ ולכן נקבל את הביטוי:

$|f-p_n|\le(0.88)^{n+1}/(n+1)$

יד. נביט על אי השויון $(0.88)^{n+1}/(n+1)\le 0.001$ השקול ל-
$1000\le(n+1)/(0.88)^{n+1}=(n+1)(1.136..)^{n+1}$. נציב כמה ערכים של n עד שנקבל: $28\le n+1$ $27\le n$.

טור ב

שאלה 1

טור ב

הבט בפונקציה

$$f=\sqrt{x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(9)=3, f(25)=5$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע $[9,25]$.

תשובה: $|f\text{-}p| \leq$.

הערכת $|f\text{-}p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$
.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f\text{-}p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:
$|f\text{-}p| \leq$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f\text{-}p| \leq$

הערכת $|f\text{-}p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f\text{-}p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:
$|f\text{-}p| \leq$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=9<a_1<a_2<,\dots, <a_n=25$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f- p_n|\le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f- p_n|\le$

יב. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f- p_n|\le$

יג. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=9,a_1=,a_2=,\dots, a_n=25$ משתנה לנתון $a_0=9,a_1=,a_2=,\dots, a_n=10.24$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f- p_n|\le$

יד. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f- p_n|\le 0.001$

תשובה לשאלה 1 טור ב

א. ישר האינטרפולציה:
$(x-9)(5-3)/(25-9)+3=2(x-9)/16+3=(x+15)/8$ ואכן אם נציב בו את $x=9,25$ נקבל את אותם ערכים כמו ב-f .
דרך ראשונה

ב,ג. $R=f-p=x^{(1/2)}-(x+15)/8$. אז $R'=x^{(-1/2)}/2-1/8$. נמצא מתי $R'>0$. אז $x^{(-1/2)}/2-1/8>0$ או $2x^{(1/2)}<8$ או $x^{(1/2)}<4$ או $3<x<16$. בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע f=0 ברור כי בנקודה זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $(16)^{(1/2)}-(16+15)/8=1/8=0.125$

דרך שניה

ד,ה. $f''=(-1/4)x^{(-3/2)}$. זוהי פונקציה יורדת בקטע [9,25] ולכן ערך המקסימום שלה נמצא כאשר x=9 ושוה בערכו המוחלט 1/108 . לכן $|f-p|\leq(1/108)(x-9)(x-25)/2!$.

ו,ז. נביט על $(x-9)(x-25)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא כאשר x=17 . אז ערכה הוא 64- ולכן, $|f-p|\leq(1/108)(64)/2=(64/216)=8/27\sim0.296296$

דרך שלישית

ח. $|f-p|\leq(1/108)(x-9)(x-25)/2!\leq(1/108)(16)(16)/2=256/216=32/27=1.185185$

ט,י. $f^{(n)}=(-1)^{(n+1)}1*3*5*...*(2n-3)x^{-(2n-1/2)}/2^n$. עלינו להציב את הנגזרת ה-(n+1) . כמו כן, כל חזקה שלילית של x היא פונקציה יורדת בקטע [9,25] וערכה המוחלט המקסימלי הוא $1/3^{2n+1}$. לכן נקבל:

$|f-p_n|\leq1*3*5*...*(2n-1)(x-9)(x-a1)...(x-25)/3^{2n+1}(n+1)!$

יא,יב נעריך $|x-ai|\leq16$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$|f-p_n|\leq1*3*5*...(2n-1)*16^{n+1}/3^{2n+1}(n+1)!$.

כדי להעריך בטוי זה כך שיופיעו בו פחות n ים, נכתב חלק מהמונה והמכנה כך:

$|f-p_n|\le(1/2)*(3/4)*(5/3*2)*\ldots*((2n-1)/2n)2^{n}\,16^{n+1}/3^{2n+1}(n+1)$.
נשים לב כי כל השברים הפשוטים הם כמעט שוים ל-1 וכן מכפלתם, ולכן נוכל לרשום במקום אי השויון הקודם, את אי השויון הבא, שהוא מדויק פחות אך גם מסבך פחות:

$$|f-p_n|\le 16^{n+1}2^{n}/3^{n}\,3(n+1)$$

יג. אם הקטע השתנה ל [9,10.24] , אז נעריך $|x-ai|\le 1.24$ ולכן נקבל את הבטוי:

$$|f-p_n|\le(0.75)^{n}/2(n+1)$$

יד. נביט על אי השויון $(0.75)^{n}/2(n+1)\le 0.001$ השקול ל-
$1000/2=500\le(n+1)/(0.75)^{n+1}=(n+1)\,(1.33..)^{n}$. נציב כמה ערכים של n עד שנקבל: $13\le n$.

שאלה 2 טור א

חשב את סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים ונקודת בינים בשמאל של $4x^3$ על הקטע [1,3] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n ולא יכיל את סימן הסיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ו. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:
$N=$

ז. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ-0.001 . $N=$

תשובה:

$$SR=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}4(1+\frac{2k}{n})^3=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4}{n^3}(n+2k)^3=$$

$$=\frac{8}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}(n^3+6n^2k+12nk^2+8k^3)=$$

$$=8+\frac{48n^2n(n-1)}{n^4 2}+\frac{96n(n-1)n(2n-1)}{6n^4}+\frac{64(n-1)^2n^2}{n^4 4}=$$

$$=8+\frac{24(n-1)}{n}+\frac{16(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{16(n-1)^2}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}80$$

תשובה ל-א 8. תשובה ל-ב $24(n-1)/n$. תשובה ל-ג: $16(n-1)(2n-1)/n^2$. תשובה ל-ד: $16(n-1)^2/n^2$.

תשובה ל-ה.

$$E=80-SR=80-(8+\frac{24(n-1)}{n}+\frac{16(n-1)(2n-1)}{n^2}+$$

$$\frac{16(n-1)^2}{n^2})=(8+24+16\cdot 2+16)-(8+\frac{24(n-1)}{n}+$$

$$\frac{16(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{16(n-1)^2}{n^2})=(8-8)+24(1-\frac{(n-1)}{n})$$

$$+16(2-\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2})+16(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}))=$$

$$=0+\frac{24}{n}+16\frac{2n^2-(n-1)(2n-1)}{n^2}+16\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}=$$

$$=\frac{24}{n}+16\frac{2n^2-(2n^2-3n+1)}{n^2}+16\frac{n^2-(n^2-2n+1)}{n^2}=$$

$$=\frac{24}{n}+16\frac{3n-1}{n^2}+16\frac{2n-1}{n^2}=\frac{24n+48n-16+32n-16}{n^2}=$$

$$\frac{104n-32}{n^2}\le\frac{104n}{n^2}=\frac{104}{n}$$

תשובה ל-ו: 104/n<1/1000 → 104000<n

:

ז.

$$E=\int_1^3 x^2dx-SR=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}=\frac{12c^2(3-1)^2}{2n}=\frac{24c^2}{n}\le\frac{224}{n}$$

ח. 224/n<1/1000 → 224000<n

שאלה 2 טור ב

חשב את סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים ונקודת בינים בשמאל של $4x^3$ על הקטע [2,4] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n ולא יכיל את סימן הסיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ו. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ה קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

ז. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור n>N מתקיים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ-0.001
N= .

תשובה:

$$SR=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}4(2+\frac{2k}{n})^3=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4}{n^3}(2n+2k)^3=$$

$$\frac{8}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}8(n+k)^3=\frac{64}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}(n^3+3n^2k+3nk^2+k^3)=$$

$$=64+\frac{192n^2n(n-1)}{n^4 2}+\frac{192n(n-1)n(2n-1)}{6n^4}+\frac{64(n-1)^2n^2}{n^4 4}=$$

$$=64+\frac{96(n-1)}{n}+\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{16(n-1)^2}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}240$$

תשובה ל-א 64. תשובה ל-ב $96(n-1)/n$. תשובה ל-ג: $32(n-1)(2n-1)/n^2$. תשובה ל-ד: $16(n-1)^2/n^2$.

תשובה ל-ה.

$$E=240-SR=240-(64+\frac{96(n-1)}{n}+\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+$$

$$\frac{16(n-1)^2}{n^2})=(64+96+32\cdot 2+16)-(64+\frac{96(n-1)}{n}+$$

$$\frac{32(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{16(n-1)^2}{n^2})=(64-64)+96(1-\frac{(n-1)}{n})$$

$$+32(2-\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2})+16(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}))=$$

$$=0+\frac{96}{n}+32\frac{2n^2-(n-1)(2n-1)}{n^2}+16\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}=$$

$$=\frac{96}{n}+32\frac{2n^2-(2n^2-3n+1)}{n^2}+16\frac{n^2-(n^2-2n+1)}{n^2}=$$

$$=\frac{96}{n}+32\frac{3n-1}{n^2}+16\frac{2n-1}{n^2}=\frac{96n+96n-32+32n-16}{n^2}=$$

$$\frac{224n-48}{n^2}\le\frac{224n}{n^2}=\frac{224}{n}$$

תשובה ל-ו: $224/n<1/1000 \rightarrow 224000<n$

:

ז.

$$E=\int_2^4 x^2dx-SR=\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}=\frac{12c(4-2)^2}{2n}=\frac{24c^2}{n}\le\frac{384}{n}$$

ח. $384/n<1/1000 \rightarrow 384000<n$

שאלה 3

עבור שאלה 2, מצא את c כך שאם נציב אותו בסעיף ז, נקבל שויון (ולא אי שויון) בהערכת השגיאה:

תשובה לשאלה 3 טור א

$(104n-32)/n^2=24c^2/n \rightarrow (104n-32)/n=24c^2 \rightarrow (104n-32)/24n=c^2=(13n-4)/3n = c^2 \rightarrow c=\sqrt{[(13n-4)/3n]}$

תשובה לשאלה 3 טור ב

$(224n-48)/n^2=24c^2/n \rightarrow (224n-48)/n=24c^2 \rightarrow (224n-48)/24n=c^2=(28n-6)/3n = c^2 \rightarrow c=\sqrt{[(28n-6)/3n]}$

שאלה 4

נתונות נקודות $a1<a2<b1<b2<\ldots<bn<c$ על ציר x וקימת פונקציה f אשר ערכי y שלה באותן נקודות ידועים. נתונות בנוסף שתי פונקציות g,h בעלות התכונות:

$g(a1)=f(a1),\ g(a2)=f(a2),\ g(b1)=f(b1),\ \ldots,\ g(bn)=f(bn).$

$h(b1)=f(b1),\ \ldots,\ h(bn)=f(bn), h(c)=f(c).$

בנה בעזרת g,h פונקציה p בעלת התכונות:

$p(a1)=f(a1),\ p(a2)=f(a2),\ p(b1)=f(b1),\ \ldots,\ p(bn)=f(bn), p(c)=f(c).$

והוכח שאכן יש לה תכונה זו.

תשובה: נגדיר את p על ידי:

$[(x-a1)(x-a2)h(x)-(x-c)g(x)]/(x-a1)(x-a2)-(x-c)$

וקל לראות כי זוהי הפונקציה הרצויה.