

דף נוסחאות עבור המבחן בנומריה:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$\sum_{k=0}^n (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \dots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

$$P_{m,n} = \frac{(x - x_m)P_{m+1,n} - (x - x_n)P_{m,n-1}}{(x - x_m) - (x - x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0) \cdots (x - a_n)}{(n + 1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i - x_{i-1} = h = (b - a)/n$,

$$SR = h \sum_{i=1}^n f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \dots \leq x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שווים, ונקודת ביניים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b - a)h}{2} = \frac{f'(c)(b - a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שווים

$$ST = \frac{h}{2} (f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שווים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3} (f(a) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(a + 2kh) + 4 \sum_{k=0}^{m-1} f(a + 2kh + h) + f(b)), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0, b_0 . נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0) < 0$. בהנתן a_n, b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n = (a_n + b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שווה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$, או, $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$.

שיטת ניוטון רפסון- (המשיק):

x_0 . נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1} = g(x_n)$, כאשר $g(x) = x - f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0, x_1 . נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \rightarrow l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(l)$$

יום א, יט כסלו התשס"ז 10-12-2006 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. המבחן ללא חומר עזר.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

הציון המקסימלי במבחן הוא 104 .

במבחן 2 שאלות.

שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 14 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \sin(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(0)=0, f(\pi/2)=1$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל- $f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[0, \pi/2]$.

תשובה: $|f-p| \leq$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שנייה:

ד. חשב את f' . תשובה: $f'=$

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:

$$|f-p| \leq$$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p| \leq$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:

$$|f-p| \leq$$

ט. כתוב את הנגזרת ה- n ית של f .

תשובה:

$$f^{(n)}=$$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = \pi/2$. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה: $|f-p_n| \leq$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f - p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים.

תשובה:
 $|f - p_n| \leq$

יב. מצא N כך ש-עבור $n > N$ התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f - p_n| \leq 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f = \sqrt{x^2 + 9}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה $a=0$.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה $x=4$.

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f' . תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב, ג (אל תעבור לאי שוויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שוויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה $a=4$.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה $x=0$.

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח, ט (אל תעבור לאי שוויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שוויון בסעיפים ט, י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות
 $f(0)=3, f(4)=5$

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

תשובות

תשובה לשאלה 1

א. ישר האינטרפולציה: $(x-0)(1-0)/(\pi/2-0)+0=2x/\pi$ ואכן אם נציב בו את $x=0, \pi/2$ נקבל את אותם ערכים כמו ב-f.

דרך ראשונה

ב,ג. $R=f-p=\sin(x)-(2x)/\pi$ אז $R'=\cos(x)-2/\pi$ נמצא מתי $R'>0$ אז $\cos(x) < 2/\pi$
 $0 < x < \arccos(2/\pi) = \arccos(0.6366) = 50.45^\circ = 0.88 \text{ rad}$
 בקטע זה f עולה, ואח"כ יורדת, ומכיון שבקצות הקטע $f=0$ ברור כי בנקודה
 זו יש שגיאה מכסימלית. ערך השגיאה הוא $\sin(0.88) - (2 \cdot 0.88)/\pi = 0.771 - 0.560 = 0.211$

דרך שניה

ד,ה. $f'=-\sin(x)$. זוהי פונקציה יורדת ושליילית בקטע $[0, \pi/2]$ ולכן ערך
 המקסימום שלה נמצא כאשר $x=\pi/2$ ושוה בערכו המוחלט 1. לכן
 $|f-p| \leq 1(x-0)(x-\pi/2)/2!$

ו,ז. נביט על $x(x-\pi/2)$. זוהי פרבולה צוחקת, ונקודת המינימום שלה היא
 כאשר $x=\pi/4$. אז ערכה הוא $\pi^2/16$ ולכן,
 $|f-p| \leq (\pi^2/16)/2 = \pi^2/32 = 0.308$

דרך שלישית

ה. $|f-p| \leq 1x(x-\pi/2)/2! \leq (\pi/2) * (\pi/2)/2 = \pi^2/8 = 1.233$

ט,י. $f^{(n)} = \sin(x), n=0 \pmod{4}, =\cos(x), n=1 \pmod{4}, =-\sin(x), n=2 \pmod{4}, =-\cos(x), n=3 \pmod{4}$.

עלינו להציב את הנגזרת ה- $(n+1)$. לכן נקבל:

$$|f-p_n| \leq 1(x-0)(x-a_1)\dots(x-\pi/2)/(n+1)!$$

יא. נעריך $|x-a_i| \leq \pi/2$ ונציב בבטוי הקודם ונקבל

$$|f-p_n| \leq (\pi/2)^{n+1}/(n+1)!$$

יב. נביט על אי השויון $(\pi/2)^{n+1}/(n+1) \leq 0.001$ נציב כמה ערכים ונמצא כי $n+1=8$ כלומר $n=7$ הוא פתרון.

תשובה לשאלה 2

קודם נחשב שתי נגזרות ל-f.

$$f = \sqrt{x^2 + 9}, f' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}, f'' = \frac{9}{(\sqrt{x^2 + 9})^3}$$

א. ישר טיילור הוא:

$$f(a) + f'(a)(x - a) = 3 + 0(x - 0) = 3$$

ב. נציב הישר $x=4$ ונקבל את הערך $y=3$.

ג. השגיאה האמיתית היא $f(4) - 3 = 5 - 3 = 2$.

ה. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n = 1,5 - 3 = \frac{f''(c)(4 - 0)^2}{2!} = 8f''(c)$$

$$2 = 8f''(c) \rightarrow f''(c) = 0.25 \rightarrow \frac{9}{(\sqrt{c^2 + 9})^3} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow (\sqrt{c^2 + 9})^3 = 36 \rightarrow c^2 + 9 = 36^{2/3} = 10.902$$

$$\rightarrow c^2 = 1.902 \rightarrow c = 1.379$$

ז. ישר טיילור הוא:

$$f(a) + f'(a)(x - a) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4).$$

ח. נציב בישר $x=0$ ונקבל את הערך $y=9/5=1.8$.

ט. השגיאה האמיתית היא $f(0)-1.8=3-1.8=1.2$

י. מציב בנוסחת השארית של לגרנז ונקבל:

$$n = 1, 3 - 1.8 = \frac{f''(c)(0 - 4)^2}{2!} = 8f''(c)$$

$$2 = 8f''(c) \rightarrow f''(c) = 0.15 \rightarrow \frac{9}{(\sqrt{c^2 + 9})^3} = \frac{1.2}{8}$$

$$(\sqrt{c^2 + 9})^3 = 60 \rightarrow c^2 + 9 = 60^{2/3} = 15.326$$

$$c^2 = 6.326 \rightarrow c = 2.5151$$

יב. ישר האינטרפולציה הוא

$$\frac{y-3}{x-0} = \frac{5-3}{4-0} \rightarrow y-3 = 0.5x \rightarrow y = 0.5x + 3.$$

יג.

למשל נביט ב- $x=1$ ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt{1^2 + 9} = \sqrt{10} = 3.1622$$

בישר האינטרפולציה:

$$0.5(1) + 3 = 3.5, |E| = 3.5 - 3.16 = 0.34$$

בטיילור המשיק ב- $a=0$:

$$3, |E| = 3.16 - 3 = 0.16$$

בטיילור המשיק ב- $a=4$:

$$5 - \frac{4}{5}(1 - 4) = 5 - \frac{12}{5} = \frac{13}{5} = 2.6, |E| = 3.16 - 2.6 = 0.56$$

.7'

למשל נביט ב- $x=2$ ונציב אותה ב-4 פונקציות שונות.

בעקום האמיתי

$$\sqrt{2^2 + 9} = \sqrt{13} = 3.605$$

בישר האינטרפולציה:

$$0.5(2) + 3 = 4, |E| = 4 - 3.605 = 0.395$$

בטיילור המשיק ב- $a=0$:

$$3, |E| = 3.605 - 3 = 0.605$$

בטיילור המשיק ב- $a=4$:

$$5 - \frac{4}{5}(2 - 4) = 5 - \frac{8}{5} = \frac{17}{5} = 3.4, |E| = 3.605 - 3.4 = 0.205$$