דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \leq i \leq n+1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \leq i \leq n$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \leq c_1 \leq x_1 = a + h \leq c_2 \leq x_2 = a + 2h \leq \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b))$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

$a_0,b_0$. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן $a_n,b_n$ נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$ , ונביט על $f(c_n)$ . אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$ , או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$.
הדבר נקבע כך ש -$f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ .

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

$x_0$. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

$x_0,x_1$. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ד, יב שבט התשס"ג 15-1-2003 סמסטר א, מועד א.

מבחן באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 83 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 7 שאלות במשקל 16 נקודות כל אחת, ויש לענות בו 5 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-5 תשובות, תבדקנה רק 5 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 16 נקודות, כולל שתי שאלות ואשר מביניהן יש לבחור אחת. כל שאלה במשקל 16 נקודות, והיא קשורה לחומר הנלמד בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית. אם נענו שתי השאלות, תבדק רק התשובה הראשונה.

שאלה, שלא נתנה לה תשובה נכונה בשאלון, ושנבחרה על ידי הנבחן, תזכה אותו במלא הנקודות.

בהצלחה.

חלק א

אינטגרציה נומרית:

1.נתונה הפונקציה $f=e^{(x^2)}$ בקטע $[a=0, b=1]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-$n=4$ קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ב. $e(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$
ג. $e(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ד. $(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$

פתרון: לפי הנוסחה יוצא סעיף א.

1.נתונה הפונקציה $f=e^{(x^2)}$ בקטע $[a=1,b=2]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-$n=4$ קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $e(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ב. $(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ג. $e(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$
ד. $(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$

פתרון: לפי הנוסחה יוצא סעיף ג.

2.נתונה הפונקציה $f=x^2+x$ בקטע $[a,b]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ב. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ג. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$
ד. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$

2.נתונה הפונקציה $f=x^2-x$ בקטע $[a,b]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ב. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$
ג. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ד. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$

פתרון לשאלה 2 בשני הטורים: בקובץ נומרית 4 חושב סכום שיטת הטרפז עבור $f(x)=x^2$ . בעמוד 26 יצאה תוצאת הסכום: $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab)/6n^2$ . שיטת הטרפז עבור פונקציה לינארית נותנת תשובה מדויקת, כלומר $(b^2-a^2)/2$ , אשר ניתן לבטא כ-$(b-a)/6n^2$ כפול הבטוי $3n^2(a+b)$ . לכן התשובה בטור הראשון היא ב, ובשני היא גם כן ב.

3. נתונה הפונקציה $f=x^3-12x+5$ בקטע $[a=0, b=3]$. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 67501 ב. 216001 ג. 72001 ד. 22501

פתרון: נוסחת השגיאה היא $f'(c)(b-a)^2/2n$. אז $(b-a)^2=9$, ונותר להעריך את $f'$ בקטע . $f''=6x$ . $f''=0$ גורר ש-$x=0$ . לכן יש להציב את 0 ואת הקצוות ב-$f'$ ונקבל: $f'(0)=-12$ . $f'(3)=15$ ולכן נקבל $15\cdot 9/2n<0.001$ או $n>135\cdot 500=67500$, והתשובה היא א.

3. נתונה הפונקציה $f=x^3-27x+5$ בקטע $[a=0, b=4]$. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 72001 ב. 22501 ג. 67501 ד. 216001

פתרון: $f'=3x^2-27$ . הנקודות החשודות לקיצון הן $x=0,4$ כאשר 0 חשודה פעמים, כיון שהיא גם קצה וגם נקודת התאפסות של $f''$ .$f''(0)=-$ $f''(4)=21$ 27, ולכן מקסימום הערך המחלט הוא 27 . נקבל: $27\cdot 16/2n<0.001$ או $n>216000$ והתשובה היא ד.

פתרון של משוואות:

4. המשוואה $f(x)=x^3-4x^2-19x-14=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=16]$ . נערכו 3 איטרציות. אז $c_3$ שווה ל-

פתרון: $f(0)=-14<0,f(16)=4096-1024-304-14>0,f(8)=512-256-152-14>0,f(4)=64-64-76-14<0,f(6)=216-144-114-14<0$ ולכן התשובה היא $c=7$ .

א. 3 ב. 9 ג. 7 ד. 5

4. המשוואה $f(x)=x^3-2x^2-13x-10=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=16]$ . נערכו 3 איטרציות. אז $c_3$ שווה ל-

א. 7 ב. 5 ג. 3 ד. 9

פתרון: $f(0)=-10<0,f(16)=4096-512-208-14>0,f(8)=512-128-104-14>0,f(4)=64-32-52-10<0,f(6)=216-72-78-14>0$ ולכן התשובה היא $c=5$ .

5. המשוואה $f(x)=(x^2-10x+32)/8=0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=2$ . נערכו 2 איטרציות. אז $x_3$ שווה ל-

א. 6 ב. 10 ג. 2 ד. 16/3

פתרון: $f(0)=4,f(2)=2,x_2=(0-8)/(2-4)=4,f(4)=1,x_3=(2-8)/(1-2)=6$

5. המשואה $f(x)=(x^2-14x+72)/12 = 0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=2$ . נערכו 2 איטרציות. אז $x_3$ שוה ל-

א. 10 ב. 16/3 ג. 2 ד. 6

$f(0)=6,f(2)=4,x_2=(0-12)/(4-6)=6,f(6)=2,x_3=(4-24)/(2-4)=10$

6. המשואה $f(x)= -1.25x^3+3.5x^2-x+2=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 2 איטרציות. אז $x_2$ שוה ל-

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4

פתרון: $g=x-f/f'=x-(-(5/4)x^3+(7/2)x^2-x+2)/(-(15/4)x^2+7x-1))= x-(-5x^3+14x^2-4x+8)/(-15x^2+28x-4))=(-10x^3+14x^2-8)/(-15x^2+28x-4)) =(10x^3-14x^2+8)/(15x^2-28x+4))=g(x).g(0)=2.g(2)=32/8=4$

6. המשואה $f(x)= (2/27)x^3-x+3=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 2 איטרציות. אז $x_2$ שוה ל-

א. 4 ב. 1 ג. 2 ד. 3

פתרון: $g=x-f/f'=x-((2/27)x^3-x+3)/((2/9)x^2-1))= x-(2x^3-27x+81)/(6x^2-27))=(4x^3-81)/(6x^2-27)) =g(x).g(0)=3.g(3)=27/27=1$

אינטרפולציה

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(3)=179, f(2)=57,f(1)=15,f(-1)=3,f(-2)=9$ . הצג את הפולינום כ: $ax^4+ bx^3+ cx^2+dx+e$. אז $b=$

א. 2 ב. 3 ג. 4 ד. 5

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים:
$f(3)=179,\ f(2)=57, f(1)=15, f(-1)=3, f(-2)=9$ . הצג את הפולינום כ:
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. אז $c=$

א. 4 ב. 2 ג. 3 ד. 5

פתרון: זהו אותו פולינום בשני הטורים ונמצא אותו לפי שיטת נוויל:

$$\begin{pmatrix} f(3)=179 & & & & \\ & p & & & \\ f(2)=57 & & t & & \\ & q & & w & \\ f(1)=15 & & u & & m \\ & r & & k & \\ f(-1)=3 & & v & & \\ & s & & & \\ f(-2)=9 & & & & \end{pmatrix}$$

כאשר p,q,r,s הם פולינומים ממעלה ראשונה, t,u,v ממעלה שניה, w,k ממעלה שלישית ו-m הפולינום שהתבקש הוא ממעלה רביעית. בכל פולינום אפשר לבצע בדיקה ע"י הצבה. נקבל:

$p(x)=(179(x-2)-57(x-3))/1=122x-187,$
$q(x)=(57(x-1)-15(x-2))/1=42x-27,$
$r(x)=(15(x+1)-3(x-1))/2=6x+9,$
$s(x)=(3(x+2)-9(x+1))/1=-6x-3,$
$t(x)=((42x-27)(x-3)-(122x-187)(x-1))/(-2)=40x^2-78x+53,$
$u(x)=((42x-27)(x+1)-(6x+9)(x-2))/3=12x^2+6x-3,$
$v(x)=((6x+9)(x+2)-(-6x-3)(x-1))/3=4x^2+6x+5,$
$w(x)=((40x^2-78x+53)(x+1)-(12x^2+6x-3)(x-3))/4=7x^3-2x^2-x+11$

$k(x)=((12x^2+6x-3)(x+2)-(4x^2+6x+5)(x-2))/4=2x^3+8x^2+4x+1$,
$m(x)=((7x^3-2x^2-x+11)(x+2)-(2x^3+8x^2+4x+1)(x-3))/5=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$,

ולכן, $b=2,c=3$
חלק ב: שאלות יצירתיות.

בחר בשאלה 8 או 9

8. פתח נוסחה להערכת שגיאה של סכומי רימן מהאינטגרל האמיתי, כמו שנעשה בכתה, אלא , שנקודות הבינים הן בצד **ימין** של כל תת קטע: פתח את הנוסחה במחברתך. השתמש בה כדי להעריך את השגיאה של סכומי רימן, נקודות בינים בימין, של האינטגרל של הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[a=1$ $b=2]$, עבור $n=5$ . השגיאה היא:

א. 0.8 ב. 0.4 ג. 0.2 ד. 0.6

8. פתח נוסחה להערכת שגיאה של סכומי רימן מהאינטגרל האמיתי, כמו שנעשה בכתה, אלא , שנקודות הבינים הן בצד **ימין** של כל תת קטע: פתח את הנוסחה במחברתך. השתמש בה כדי להעריך את השגיאה של סכומי רימן, נקודות בינים בימין, של האינטגרל של הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[a=1$ $b=2]$, עבור $n=10$ . השגיאה היא:

א. 0.4 ב. 0.2 ג. 0.6 ד. 0.8

תשובה:

נביט בהוכחת נוסחת השגיאה עבור שיטת סכומי רימן הנמצאת בעמודים הראשונים של נומרית4 . סכום רימן הוא $f(b)(b-a)$ במקום $f(a)(b-a)$ , ולכן יש לאנטגרל את $f(x)-f(b)$ (במקום $f(x)-f(a)$ ). שוב נשתמש במשפט ערך הבינים של לגרנז ונקבל $f(x)-f(b)=f'(c(x))(x-b)$ . שוב $m<f'<M$ אבל כיון ש-$(x-b)$ שלילי בקטע, נקבל

$$M(x-b) \le f(x)-f(b) \le m(x-b)$$

נאנטגרל אי שויון זה מ-a עד b . נקבל:

$$\int_a^b (x-b)dx = \left.\frac{(x-b)^2}{2}\right|_{x=a}^{x=b} = -\frac{(b-a)^2}{2}$$

כלומר השגיאה עבור קטע יחיד עם הנקודה b היא כמו עבור a . לכן נמשיך עם דפי הנוסחאות הרגילים:

$$\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n} = \frac{2c\cdot 1^2}{2n} = \frac{c}{n} \le \frac{2}{n}$$

עבור n=5 נקבל 0.4 ועבור n=10 0.2

9. נתונה הנקודה (a,f(a)) . חשב את משואת הפרבולה y=g(x) , אשר מקימת: g(a)=f(a), g'(a)=f'(a), g''(a)=f''(a) . נתונה $f(x)=x^3-1$, והנקודה (a=1.5,f(a)=2.375) עליה. חשב את הפרבולה, ומצא את נקודות החתוך שלה עם ציר x . הנקודות הן:

א. 36/(27±3√5) ב.36/(27±5√3) ג.36/(27±6√2) ד. 36/(27±4√3)

תשובה: הפרבולה היא טור טיילור עד סדר 2 כולל, ונקבל:
$0=f(a)+f'(a)(x-a)+(f''(a)(x-a)^2)/2$ נציב את a וערכיו ונקבל:
$(9/2)(x-3/2)^2+(27/4)(x-3/2)+(19/8)=0$ נסמן u=x-3/2 נכפל במכנה משותף 8 ונקבל:
$36u^2+54u+19=0$. פתרונותיה
$u=(-54\pm\sqrt{180})/72=(-27\pm\sqrt{45})/36=(-27\pm3\sqrt{5})/36$ . נזכר כי
$x=u+3/2=u+54/36$ ולכן, $x=(27\pm3\sqrt{5})/36$.