דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$
$$q_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x-a_0)h(x) - (x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$
$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n+1$$
$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים ($n=2m$ זוגי):

$$\frac{h}{3}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)\right), h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1} f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n \to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

יום ו, כו אדר א התשס"ג 28-2-2003 סמסטר א, מועד ב.

מבחן באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 83 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 7 שאלות במשקל 16 נקודות כל אחת, ויש לענות בו 5 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-5 תשובות, תבדקנה רק 5 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 16 נקודות, כולל שתי שאלות ואשר מביניהן יש לבחור אחת. כל שאלה במשקל 16 נקודות, והיא קשורה לחומר הנלמד

בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית. אם נענו שתי השאלות, תבדק רק התשובה הראשונה.

שאלה, שלא נתנה לה תשובה נכונה בשאלון, ושנבחרה על ידי הנבחן, תזכה אותו במלא הנקודות.

בהצלחה.

חלק א

אינטגרציה נומרית:

1.נתונה הפונקציה $f=_e(x^2)$ בקטע $[a=0,b=2]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-$n=4$ קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/6$
ב. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/12$
ג. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/3$
ד. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/16$

פתרון: לפי הנוסחה יוצא סעיף א.

2.נתונה הפונקציה $f=x^3$ בקטע $[a,b]$. קרב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((n^2+2)(a^3+b^3)+(n-1)(n+2)(a^2b+ab^2))/4n^2$
ב. $(b-a)((n^2+2)(a^3+b^3)+(n-2)(n+1)(a^2b+ab^2))/4n^2$
ג. $(b-a)((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-1)(n+1)(a^2b+ab^2))/4n^2$
ד. $(b-a)((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-2)(n+2)(a^2b+ab^2))/4n^2$

פתרון לשאלה 2 :

$$ST=\frac{(b-a)}{2n}((a^3+b^3)+2\sum_{k=1}^{n-1}(a+k\frac{(b-a)}{n})^3)$$

$$=\frac{(b-a)}{2n^4}(n^3(a^3+b^3)+2\sum_{k=1}^{n-1}(na+k(b-a))^3)$$

$$=\frac{(b-a)}{2n^4}(n^3(a^3+b^3)+2\sum_{k=1}^{n-1}(n^3a^3+3n^2a^2k(b-a)+3nak^2(b-a)^2+k^3(b-a)^3))$$

$$\frac{(b-a)}{2n^4}(n^3(a^3+b^3)+2((n-1)n^3a^3+6n^2a^2(b-a)\frac{n(n-1)}{2}+$$

$$(b-a)^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+2(b-a)^3\frac{n^2(n-1)^2}{4})$$

נוציא n^2 מחוץ לסוגרים ונכפל כל שבר ב-2 .   נקבל:

$$ST=\frac{(b-a)n^2}{4n^4}(2n(a^3+b^3)+4n(n-1)a^3+6a^2(b-a)n(n-1)$$

$$+2a(b-a)^2(n-1)(2n-1)+(b-a)^3(n-1)^2)=\frac{(b-a)}{4n^2}$$

$$(2n(a^3+b^3)+4(n-1)na^3+6n(n-1)(a^2b-a^3)+$$

$$+2(n-1)(2n-1)(ab^2-2a^2b+a^3)+$$

$$(n-1)^2((b^3-3ab^2+3a^2b-a^3)=\frac{(b-a)}{4n^2}($$

$$a^3(2n+4n(n-1)-6n(n-1)+2(n-1)(2n-1)-(n-1)^2)$$

$$+a^2b(6n(n-1)-4(n-1)(2n-1)+3(n-1)^2)+$$

$$ab^2(2(n-1)(2n-1)-3(n-1)^2)+b^3(2n+(n-1)^2))$$

נוציא גורמים משותפים ונקבל:

$$ST=\frac{(b-a)}{4n^2}(a^3(2n+(n-1)(4n-6n+2(2n-1)-(n-1)))+$$

$$a^2b(n-1)(6n-4(2n-1)+3(n-1))+$$

$$+ab^2(n-1)(2(2n-1)-3(n-1))+$$

$$+b^3(n^2+1))$$

ולכן:

$$ST=\frac{(b-a)}{4n^2}(a^3(2n+(n-1)(n-1))+$$

$$+a^2b(n-1)(n+1)+ab^2(n-1)(n+1)+b^3(n^2+1))=$$

$$=\frac{(b-a)}{4n^2}((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-1)(n+1)(a^2b+ab^2))$$

3. נתונה הפונקציה $f=x^4-8x^3+18x^2+5x+6$ בקטע $[a=0 ,b=3.5]$. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים

בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 257251 ב. 128626 ג. 126826 ד. 253651

פתרון: נוסחת השגיאה היא $f'(c)(b-a)^2/2n$. אז $(b-a)^2=12.25$, ונותר להעריך את f' בקטע. $f''= 4x^3-24x^2+36x+5$. $f''=12x^2-48x+36=0$ גורר ש-$x=1,3$. לכן יש להציב את 1,3 ואת הקצוות ב-f' ונקבל: $f'(0)=5$. $f'(1)=21$ $f'(3)=5$ $f'(3.5)=8.5$ ולכן נקבל $12.25\cdot21/2n<0.001$ או $n>125\cdot49\cdot21=128625$, והתשובה היא ב.

פתרון של משוואות:

4. המשוואה $f(x)=x^3-2x^2-x-1 =0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=32]$. נערכו 4 איטרציות. אז c_4 שוה ל-

א. 3 ב. 7 ג. 5 ד. 1

פתרון: $f(0)=-1<0,f(32)=32768-2048-32-1>0,f(16)=4096-512-16-1>0,f(8)=512-128-8-1>0,f(4)=64-32-2-1>0,f(2)=-3$ ולכן התשובה היא $c=3$.

5. המשוואה $f(x)=(-7x^3-37x^2-16x+150)/30 =0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=-2$. נערכו 3 איטרציות. אז x_4 שוה ל-

א. -7 ב. 6 ג. 8 ד. 7

$f(0)=5, f(-2)=3, x_2=(0-10)/(5-3)=-5, f(-5)=6, x_3=(-12-(-15))/(6-3)=1, f(1)=3,\ x_4=(-15-6)/(3-6)=7$

6. המשואה $f(x)= 4x^3-12\ x^2-x+2=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 3 איטרציות. בטא כל תוצאה כשבר. אז x_3 שווה ל-

א. -25112/2768 ב. -24306/2687 ג. -23448/2882

ד. -26538/2348

פתרון: $g=x-f/f'=x-(4x^3-12\ x^2-x+2)/(12x^2-24x-1))=(8x^3-12\ x^2-2)/(12x^2-24x-1)) =g(x).g(0)=2.g(2)=14/(-1)=-14, g(-14)=(-24306)/2687$

אינטרפולציה

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(3)=115,\ f(2)=27, f(1)=3, f(-1)=3, f(-2)=15$. הצג את הפולינום כ: $ax^4+ bx^3+ cx^2+dx+e$. אז $d=$

א. 2 ב. 1 ג. -1 ד. -2

פתרון: נמצא אותו לפי שיטת נוויל:

$$\left(\begin{array}{ccccc}
f(3)=115 & & & & \\
 & p & & & \\
f(2)=27 & & t & & \\
 & q & & w & \\
f(1)=3 & & u & & m \\
 & r & & k & \\
f(-1)=3 & & v & & \\
 & s & & & \\
f(-2)=15 & & & &
\end{array}\right)$$

כאשר p,q,r,s הם פולינומים ממעלה ראשונה, t,u,v ממעלה שניה, w,k ממעלה שלישית ו-m הפולינום שהתבקש הוא ממעלה רביעית. בכל פולינום אפשר לבצע בדיקה ע"י הצבה. נקבל:

$p(x)=(115(x-2)-27(x-3))/1=88x-149$,
$q(x)=(27(x-1)-3(x-2))/1=24x-21$,
$r(x)=(3(x+1)-3(x-1))/2=3$,
$s(x)=(3(x+2)-15(x+1))/1=-12x-9$,
$t(x)=((24x-21)(x-3)-(88x-149)(x-1))/(-2)=32x^2-72x+43$,
$u(x)=((24x-21)(x+1)-(3)(x-2))/3=8x^2-5$,
$v(x)=((3)(x+2)-(-12x-9)(x-1))/3=4x^2-1$,
$w(x)=((32x^2-72x+43)(x+1)-(8x^2-5)(x-3))/4=6x^3-4x^2-6x+7$
$k(x)=((8x^2-5)(x+2)-(4x^2-1)(x-2))/4=x^3+6x^2-x-3$, $m(x)=$
$=((6x^3-4x^2-6x+7)(x+2)-(x^3+6x^2-x-3)(x-3))/5=x^4+x^3+x^2-x+1$,

ולכן, $d=-1$

חלק ב: שאלות יצירתיות.

בחר בשאלה 8 או 9

8. פתח נוסחה להערכת שגיאה של סכומי רימן מהאינטגרל האמיתי, כמו שנעשה בכתה, אלא , שנקודות הבינים הן **באמצע** כל של תת קטע: פתח את הנוסחה במחברתך. הנוסחה היא $(f'(c)(b-a)^2)/kn$ כאשר $k=$

א. 8 ב. 4 ג. 2 ד. 6

תשובה:

נביט בהוכחת נוסחת השגיאה עבור שיטת סכומי רימן הנמצאת בעמודים הראשונים של נומרית4 . סכום רימן הוא f((a+b)/2)(b-a) במקום f(a)(b-a) , ולכן יש לאנטגרל את f(x)-f((a+b)/2) במקום f(x)-f(a)). שוב נשתמש במשפט ערך הבינים של לגרנז ונקבל f(x)-f((a+b)/2)=f'(c(x))(x-(a+b)/2) . שוב m<f'<M . (x-(a+b)/2) מחליפה סימן בקטע, והאינטגרל של בטוי זה מ-a עד b הוא 0 . לכן נפריד את הבטוי לשני אינטגרלים, מ-a עד (a+b)/2 , שיצא שלילי, ומאמצע הקטע עד b שיצא חיובי. נחבר את השני עם הנגדי של הראשון, (מה ששקול לומר שנחשב את האינטגרל של הערך המוחלט של (x-(a+b)/2)). בטוי זה שוה לפי הסימטריה שלו לפעמים האינטגרל מ-(a+b)/2 עד b . האינטגרל שוה אם כך ל-

$$2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-\frac{(a+b)}{2})dx = 2\frac{(x-(a+b/2))^2}{2}\Bigg|_{x=\frac{a+b}{2}}^{x=b} = \frac{(b-a)^2}{4}$$

ולכן, השגיאה בקטע אחד חסומה על ידי:

$$\frac{m(b-a)^2}{4} \le Er \le \frac{M(b-a)^2}{4}$$

ולפי תכונת הרציפות של f′נקבל כי השגיאה עבור קטע אחד היא:

$$\frac{f'(c)(b-a)^2}{4}$$

כעת נחבר עבור כל הקטעים ונקבל את התשובה $(f'(c)(b-a)^2)/4n$

9 . נתונה $f(x)=x^4-17$, והנקודה $(a=1,f(a)=-16)$ עליה. חשב את משוואת הפרבולה $y=g(x)$, אשר מקימת: $g(a)=f(a), g'(a)=f'(a), g''(a)=f''(a)$. מצא את נקודות החתוך שלה עם ציר x. עבור כל נקודת חתוך כזו, העבר פרבולה מתאימה תוך שמוש באותה פונקציה, ולכל אחת נקודות חתוך עם ציר x. תקבל עד 4 נקודות ממשיות. הנקודות הן:

א. $7/3, -1, (49\pm\sqrt{325})/21$ ב. $7/3, -1, (98\pm\sqrt{865})/21$
ג. $-7/3, 1, (98\pm\sqrt{865})/21$ ד. $-7/3, 1, (49\pm\sqrt{325})/21$

תשובה: הפרבולה היא טור טיילור עד סדר 2 כולל, ונקבל:
$0=f(a)+f'(a)(x-a)+(f''(a)(x-a)^2)/2$ נציב את a וערכיו ונקבל:
$6(x-1)^2+4(x-1)-16=0$ נסמן $u=x-1$ נצמצם ב-2 ונקבל:
$3u^2+2u-8=0$. פתרונותיה
$u=(-2\pm\sqrt{100})/6=(-2\pm10)/6=4/3,-2$. נזכר כי $x=u+1$ ולכן, $x=-1,7/3$.

כעת עלינו למצא את הפרבולות המתאימות ל- $a=-1$ ול-$a=7/3$

נביט על $a=-1$, נציב את ערכיו בפרבולה ונקבל:
$6(x+1)^2-4(x+1)-16=0$, נצמצם ב-2 נציב $u=x+1$ ונקבל $3u^2-2u-8=0$.
פתרונותיה $u=-4/3,2$, ונציב ונקבל $x=-7/3,1$.

נביט על $a=7/3$, נציב את ערכיו בפרבולה ונקבל:
$(49\cdot12(x-7/3)^2)/3-(4\cdot 343(x-7/3))/27+(2401/81-17)=0$, נכפל ב-81
נציב $u=x-7/3$ ונקבל $1323u^2+2058u+512=0$.
במקרה זה נקבל .

$u12=(-2058\pm\sqrt{1525860})/2646=(-6\cdot7^3\pm42\sqrt{5}\sqrt{173})/2\cdot27\cdot49=$.
$=(-49\pm\sqrt{865})/63$

נזכר כי $u=x-7/3=x-147/63$. נעביר $147/63$ לאגף שני ונקבל
$x_{12}=(98\pm\sqrt{865})/63$