דף נוסחאות עבור המבחן:

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!}+R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y=f(a)+\frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm=\begin{pmatrix}1 & a_0 & \cdots & a_0^n\\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n\\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}$$

$$\det(vdm)=\prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p=f(a_0)q_0(x)+\cdots+f(a_n)q_n(x)$$
$$q_i(x)=\frac{\prod_{j\ne i}(x-a_j)}{\prod_{j\ne i}(a_i-a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x)=\frac{(x-a_0)h(x)-(x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i)=f(a_i), 1\le i\le n+1$$

$$g(a_i)=f(a_i), 0\le i\le n$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1}), a=x_0\le c_1\le x_1\le c_2\le x_2\le\cdots x_n=b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR=h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a=x_0\le c_1\le x_1=a+h\le c_2\le x_2=a+2h\le\cdots x_n=a+nh=b$$

יום ו, א טבת התשס"ג 6-12-2002

מבחן אמצע באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 80 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 6 שאלות במשקל 20 נקודות כל אחת, ויש לענות בו 4 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-4 תשובות, תבדקנה רק 4 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 20 נקודות, כולל שאלה אחת, אשר קשורה לחומר הנלמד בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית.

בהצלחה.

חלק א

אינטרפולציה:

1.נתון כי $f(4)=2, f(9)=3, f(16)=4$. נבנה פולינום האינטרפולציה ע"ס נקודות אלו $y=ax^2+bx+c$. אז b שווה ל-

א. 11/42 ב. 13/42 ג. 15/42 ד. 17/42

פתרון: נמצא את הפולינום לפי שיטת נוויל:
$2(x-9)-3(x-4)/((x-9)-(x-4))=-x-6/-5=x+6/5=p(x)$. פולינום זה אמור לעבור דרך שתי הנקודות הראשונות: בדיקה: $p(4)=10/5=2$, $p(9)=15/5=3$ כדרוש. באותו אופן
$3(x-16)-4(x-9)/((x-16)-(x-9))=-x-12/-7=x+12/7=q(x)$ בדיקה: $q(9)=21/7=3$, $q(16)=28/7=4$.

כעת נמצא את הפולינום המבוקש:
$R(x)=(x-16)p(x)-(x-4)q(x)/((x-16)-(x-4))=7(x-16)(x+6)-5(x-4)(x+12)/(-12)\cdot 5\cdot 7=((7x^2-70x-7\cdot 96)-(5x^2+40x-5\cdot 48))/(-420)=(2x^2-110x-9\cdot 48)/-420=(-2x^2+110x+432)/420$

נודא על ידי בדיקה:

$R(4)=(-32+440+432)/420=840/420=2$
$R(9)=(-162+990+432)/420=1260/420=3.$
$R(16)=(-512+1760+432)/420=1680/420=4$

ולכן התשובה היא א.

2. על הנתונים בשאלה 1 נוסף הנתון $f(x)=\sqrt{x}$. בצע הערכת שגיאה עבור הפולינום של שאלה 1 בדרך הגסה שלמדנו בכתה, עבור כל x בקטע [4,16] . הערך המקסימלי של השגיאה בקטע הוא:

א. 63/32 ב. 65/32 ג. 55/32 ד. 57/32

פתרון: נביט על נוסחת הערכת השגיאה. כיון שהשתמשנו ב-3 נקודות, אז $n+1=3$ ויש להביט על $f'''(x)=3/(8\sqrt{x^5})$. נקבל:

$$R_2(x)=\frac{3(x-4)(x-9)(x-16)}{8\sqrt{(c(x))^5}\,3!}$$

ולכן כעת נעריך את כל אחד מהגורמים בקטע: מתקים 4≤c(x)≤16
ולכן $32\le c(x)^{2.5}\le 1024$ **ולכן** $1/1024\le c(x)^{-2.5}\le 1/32$. בנוסף
$0\le(x-4)\le12$, $-5\le x-9\le7$, $-16\le x-16\le0$, ולכן נקבל הערכה:

$$|R_2|\le\frac{3\cdot12\cdot7\cdot12}{8\cdot32\cdot6}=\frac{63}{32}$$

3. נתונים ערכי f בסדרת נקודות כלשהיא, $4=a0<a1<a2\ldots<an=16$
ומחושב פולינום האינטרפולציה. בצע הערכת שגיאה עבור פולינום זה
בדרך הגסה שלמדנו בכתה, עבור כל x בקטע [4,16] . הערך המקסימלי של
השגיאה בקטע הוא:

א. $(12\cdot3^n)/(n+1)$ ב. $(6\cdot12^n)/(n+1)$ ג. $(3\cdot4^n)/(n+1)$ ד. $(4\cdot6^n)/(n+1)$

פתרון:

$$R_n(x)=\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}c(x)^{n+0.5}}\cdot\frac{(x-a0)\cdots(x-an)}{(n+1)!}$$

$$|R_n(x)|\le\frac{1}{1\cdot2}\,\frac{3}{2\cdot2}\cdots\frac{2n-1}{2\cdot n}\,\frac{(x-a0)\cdots(x-an)}{2(n+1)(c(x))^{n+0.5}}\le\frac{(x-a0)\cdots(x-an)}{2(n+1)(c(x))^{n+0.5}}$$

כל אחד מהגורמים במונה קטן מ-12 , ולכן נקבל:

$$|R_n(x)| \le \frac{12^{n+1}}{2(n+1)c(x)^{n+0.5}}$$

שוב, $4 \le c(x) \le 16$, **ולכן** $4^{(2n+1)/2} \le c(x)^{(2n+1)/2} \le 16^{(2n+1)/2}$ ולכן,
$2^{(2n+1)} \le c(x)^{(2n+1)/2} \le 4^{(2n+1)}$, ולכן $c(x)^{-(2n+1)/2} \le 0.5^{(2n+1)}$ **ולכן**:

$$|R_n(x)| \le \frac{12^{n+1}}{2(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{12^{n+1}}{4(n+1)2^{2n}} = \frac{12}{4(n+1)}\frac{12^n}{4^n} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$$

ברצוני להודות לאיתי אבן חן מכתה 11 שטרח להעיר לי אודות שגיאה שהיתה בפתרון, עד שהצלחתי להבין אותו.

טורי טיילור

4. בהנחה כי פתחנו את טור טיילור עבור $f(x)=\tan(x)$ סביב $a=0$ עד סדר שלש כולל, וכי מתקיים בקטע $[0, \pi/4]$ כי $f^{(5)}(x)>0$, השגיאה בטור טיילור עבור $\tan(\pi/4)$ תהיה קטנה מ-:

א. $(7\pi^4)/395$ ב. $(6\pi^4)/343$ ג. $(5\pi^4)/384$ ד. $(3\pi^4)/288$

פתרון:

$F=\sin(x)\cos^{-1}(x)$

$F'=\cos(x)\cos^{-1}(x)+\sin^2(x)\cos^{-2}(x)= 1+\sin^2(x)\cos^{-2}(x)=1+f^2$

$F''=2ff'=2f+2f^3$, $f'''=2f'+6f^2f'=2(1+f^2)+6f^2(1+f^2)=2+8f^2+6f^4$

$F''''=16ff'+24f^3f'=16f(1+f^2)+24f^3(1+f^2)=16f+40f^3+24f^5$.

כיון שהנגזרת הבאה חיובית, הרי ש-f'''' חסומה בקצות הקטע, ולכן: $F''''(0)=0$, $F''''(\pi/4)=80$ ולכן נקבל:

$$R_4 = \frac{f''''(c(x))h^4}{4!}$$

$$|R_4| \le \frac{(\pi/4)^4 80}{24} = \frac{80\pi^4}{24\cdot 256} = \frac{5\pi^4}{384}$$

אינטגרציה נומרית

5. מחשבים את סכום רימן עבור $f(x)=x$ בקטע $[a,b]$ ע"י חלוקה לשלשה קטעים שוים, ובחירת נקודת הבינים בשמאל כל תת קטע. הסכום הוא:

א. $(2a+b)(b-a)/3$ ב. $(3a+2b)(b-a)/3$
ג. $(a+2b)(b-a)/3$ ד. $(2a+3b)(b-a)/3$

פתרון:

נגדיר $h=(b-a)/3$ ולכן:

$SR=hf(a)+hf(a+h)+hf(a+2h)=h(a+a+h+a+2h)=h(3a+3h)=3h(a+h)=(b-a)(a+(b-a)/3)=(b-a)(3a+(b-a))/3=(b-a)(2a+b)/3$

6. מחשבים את סכום רימן עבור $f(x)=x$ בקטע $[a,b]$ ע"י חלוקה ל-n קטעים שוים, ובחירת נקודת הבינים בשמאל כל תת קטע. הסכום הוא:

א. $(b-a)(na+(n-1)b)/n$
ב. $(b-a)((n+3)a+(n+1)b)/2n$
ג. $(b-a)((n-1)a+(n-2)b)/n$
ד. $(b-a)((n+1)a+(n-1)b)/2n$

פתרון: נגדיר $h=(b-a)/n$ ולכן:

SR=hf(a)+hf(a+h)+…+hf(a+(n-1)h)=h(a+(a+h)+(a+2h)+ …+ (a+(n-1)h))=h(na+(n(n-1)h/2)=nh(a+(n-1)h/2)=(b-a)(2a+(n-1)h)/2=(b-a)(2na+(n-1)(b-a))/2n=(b-a)((n+1)a+(n-1)b)/2n

חלק ב

1.חשב את הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix}$$

התשובה היא:

א. $2(b-a)(c-a)(d-a)(a^2+b^2+c^2+d^2)(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

ב. $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

ג. $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d(a+b+c)-c(a+b+d))$

ד. $(b-a)(c-a)(d-a)(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2$

פתרון: נבצע את הפעולה הבאה: כל עמודה תוחלף בעצמה, פחות העמודה הקודמת לה כפולה ב-a (האחרונה ב a^2) . נקבל את הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab & b^4-a^2b^2 \\ 1 & c-a & c^2-ac & c^4-a^2c^2 \\ 1 & d-a & d^2-ad & d^4-a^2d^2 \end{pmatrix}$$. נפתח לפי שורה ראשונה

ובמינור נוציא מכל שורה גורם משותף: נקבל את הדטרמיננט של:

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{pmatrix} 1 & b & b^2(a+b) \\ 1 & c & c^2(a+c) \\ 1 & d & d^2(a+d) \end{pmatrix}$$

שוב נבצע פעולות: עמודה אחרונה פחות b(a+b) זו שלפניה, עמודה שניה פחות b פעמים הראשונה, ונקבל את הדטרמיננט של המטריצה:

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & c-b & c^2(a+c)-bc(a+b)\\ 1 & d-b & d^2(a+d)-bd(a+b)\end{pmatrix}$$

נפתח לפי שורה ראשונה ונקבל את הדטרמיננט של המטריצה:

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{pmatrix}c-b & c^3+ac^2-cb^2-abc\\ d-b & d^3+ad^2-db^2-abd\end{pmatrix}=$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{pmatrix}c-b & c(c^2-b^2)+ac(c-b)\\ d-b & d(d^2-b^2)+ad(d-b)\end{pmatrix}$$

כעת נשים לב כי אפשר להוציא גורם משותף מכל שורה, ונקבל את הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{pmatrix}1 & c(c+b)+ac\\ 1 & d(d+b)+ad\end{pmatrix}$$

ולכן הדטרמיננט שוה ל-

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d(d+b)+ad-c(c+b)-ac)$$

נותר לחשב את הסוגרים האחרונים:

$$d^2+bd+ad-c^2-cb-ac=$$

$$(d^2-c^2)+b(d-c)+a(d-c)=$$

$$(d-c)(d+c+b+a)=(d-c)(a+b+c+d)$$