פרק 3   פתרון נומרי של משואות

נתונה משואה רבועית $ax^2+bx+c=0$ ומחפשים את פתרונותיה.

נחלק אותה ב- $a\neq 0$, ונקבל $x^2+(b/a)x+(c/a)=0$. אנו מחפשים

רבוע מהצורה $(x+d)^2$ שידמה ככל האפשר לבטוי בצד שמאל.

ואכן $(x+(b/2a))^2=x^2+(b/a)x+(b^2/4a^2)$ הוא הרבוע המתאים

ולכן נקבל , $(x+(b/2a))^2-(b^2/4a^2)+(c/a)=0$ ולכן

$(x+(b/2a))^2=(b^2-4ac)/4a^2$ או $(x+(b/2a))=\pm\sqrt{(b^2-4ac)/4a^2}$

ולכן מקבלים את הפתרון הרגיל.

נתונה משואה ממעלה שלישית $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ומחפשים את

פתרונותיה. נחלק אותה ב- $a\neq 0$, ונקבל

$x^3+(b/a)x^2+(c/a)x+(d/a)=0$. אנו

מחפשים בטוי מהצורה $(x+e)^3$ שידמה ככל האפשר לבטוי בצד

שמאל.

דוגמה

נביט בפולינום $p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6=0$, וננסה

לעשות עליו את אותו תהליך. נביט על

$(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$, כלומר לבטוי זה ולפולינום המקורי

איברים זהים מסדר שלש ושנים. לכן המשואה שקולה ל-

כלומר על ידי הצבת $(x-2)^3-(x-2)=0$ או $p(x)=(x-2)^3-x+2=0$,

$z=x-2$ נקבל משואה $z^3-z=0$ אותה נפתר על ידי $z(z-1)(z+1)=0$

ולכן $z=\pm 1,0$ ולכן $x=z+2=1,2,3$ ופתרנו את המשואה.

כעת נחזור למקרה הכללי, $p(x)=x^3+(b/a)x^2+(c/a)x+(d/a)=0$, ונשוה

אותו לבטוי $(x+(b/3a))^3=x^3+(b/a)x^2+(b^2/3a^2)x+(b^3/27a^3)$

לשני הבטויים יש אותם איברים מסדר שלש ושנים, ולכן נכתב:

$$p(x)=(x+(b/3a))^3-(b^2/3a^2)x-(b^3/27a^3)+(c/a)x+(d/a)=0$$

נכנס איברים מאותה חזקה

$$p(x)=(x+(b/3a))^3+((3ac-b^2)/3a^2)x+((27da^2-b^3)/27a^3)=0$$

נציב $z=x+b/3a$, ולכן $x=z-(b/3a)$ ונקבל

$$z^3+((3ac-b^2)/3a^2)(z-(b/3a))+((27da^2-b^3)/27a^3)=0$$

נפתח סוגרים ונקבל

$$z^3+((3ac-b^2)/3a^2)z-((9abc-b^3-27da^2-9b^3)/27a^3)=0$$

ולכן קבלנו משואה מהצורה $z^3+Az+B=0$

כאשר $A=((3ac-b^2)/3a^2)$, $B=((-9abc+27da^2+10b^3)/27a^3)$

16-12-2001-03

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

חזור על החשבונות הקודמים (שיבלעו את האבר מסדר שני בגבהו)

עבור הפולינומים הבאים.

$x^3-24x^2+112x-64$

$x^4-48x^3+120x^2-110x-6$

והוכחנו את המשפט הבא:

נתון פולינום ממעלה n. קימת הצבה $z=x+a$ המשנה את הפולינום

כך שלא תהיה לו חזקת $n-1$.

נוסחת קרדן

נניח שנתונה המשואה $z^3-3p\, z-2q=0$. נביט בהצבה

$z=\sqrt{p}(u+(1/u))$, אז מתקים כי $z^3=\sqrt{p}^3\,(u^3+3u+(3/u)+(1/u^3))$

כלומר $z^3-3\sqrt{p}^3\,(u+(1/u))=\sqrt{p}^3\,(u^3+(1/u^3))$ ולכן

$z^3-3p\, z=\sqrt{p}^3\,(u^3+(1/u^3))=2q$ ולכן נקבל את המשואה

הבאה: $u^3+(1/u^3)=2q/\sqrt{p}^3$, או, $u^6-2q\, u^3/\sqrt{p}^3+1=0$. מכאן

אפשר למצא את u^3, ואח"כ את u, ואח"כ את z.

16-12-2001-02
17-12-2001-01
דוגמה

נביט במשואה $x^3-9x^2+20x-12=0$, נציב $z=x-3$ ונקבל

$z^3=x^3-9x^2+27x-27$, ולכן המשואה היא $z^3-7x+15=0$

או $z^3-7(z+3)+15=0$ או, $z^3-7z-6=0$ או, $z^3-3(7/3)z-2\cdot 3=0$.

כלומר $p=7/3$, $q=3$, נקבל משואה $u^6-2\cdot 3\, u^3/\sqrt{(7/3)^3}+1=0$

ולכן

$$u^3=\frac{\frac{6}{\sqrt{7^3}\big/\sqrt{3^3}}\pm\sqrt{\frac{36}{7^3\big/3^3}-4}}{2}=\frac{2\left(\frac{3}{\sqrt{7^3}\big/\sqrt{3^3}}\pm\sqrt{\frac{9}{7^3\big/3^3}-1}\right)}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3^3}}{\sqrt{7^3}}\pm\sqrt{\frac{3^5}{7^3}-1}=\frac{\sqrt{243}\pm\sqrt{243-343}}{7\sqrt{7}}$$

ולכן

$$u^3=\frac{\sqrt{243}\pm 10i}{7\sqrt{7}}$$

ולכן נקבל שלשה פתרונות עבור u. ברור כי המכנה של u כולל

את $\sqrt{7}$, ולכן ננסה להוציא שרש שלישי מהמונה. מתקים כי

$$\tan(u^3) = \frac{10}{\sqrt{243}} = \sqrt{\frac{100}{243}} = 0.641500299$$

ולכן

$$\arg(u^3) = \arctan(0.6415) = 32.68018395$$

נחלק את הזוית ב- 3 ונחשב לה sin ונקבל

$$\sin(10.89339465) = 0.188982236$$

כיון שיש במכנה √7, נכפל בו ונקבל את התוצאה 1/2.

נחשב את cos של אותה זוית ונכפל ב- √7. נקבל 2.598076211

כיון שצופים בתשובה הרבה שרשים, נעלה ברבוע ונקבל 6.75.

לכן קבלנו

$$u = \frac{\sqrt{6.75} + \frac{i}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{27} + i}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3} + i}{2\sqrt{7}}$$

נעלה בטוי זה בחזקת 3 ואכן נקבל את u^3 שקבלנו קודם.

נזכר בשויון z=√p(u+(1/u)), ונקבל:

$$z = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(\frac{3\sqrt{3}+i}{2\sqrt{7}} + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+i}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}}\left(\frac{3\sqrt{3}+i}{2\sqrt{7}} + \frac{2\sqrt{7}(3\sqrt{3}-i)}{28}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}}\left(\frac{3\sqrt{3}+i}{2\sqrt{7}} + \frac{(3\sqrt{3}-i)}{2\sqrt{7}}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}}\left(\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) = 3$$

כלומר z=3 הוא פתרון של המשואה המצורפת, או x=6 הוא פתרון של המשואה המקורית. כדי למצוא את שאר הפתרונות, או שנחלק את המשואה המקורית ב- x-6, או את המצורפת ב- z-3

או שנכפל את u שמצאנו בשרשים השלישיים של היחידה, שהן החזקות של הבטוי b .

$$b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

שעורי בית להגשה בכתב בשבוע הבא

פתור את המשואה $x^3-12x^2+35x-24=0$ דרך נוסחת קרדן עד השלב

של u^3.

קימת דרך כללית לפתרון משואות ממעלה 4 בדיוק. מצא אותה

תלמיד של קרדן.

משפט של Galois.

נתונה המשואה $ax^5+bx^4+ cx^3+dx^2+ex+f=0$. לא קימת פונקציה

$g(a,b,c,d,e,f)$, המרכבת מפעולות חבור חסור כפל חלוק והעלאה

בחזקה רציונלית, אשר נותנת שרש של המשואה המקורית.

פתרון נומרי של משואות

נלמד שלש שיטות לפתרון נומרי של משואות.

שיטת החציה.

שיטת המיתר.

שיטת המשיק- Newton Rafson

שיטת החציה:

נתונה פונקציה f, אשר רציפה בקטע [a,b], וכך שמתקיים $f(a)f(b)<0$,

כלומר f שונת סימן בקצות הקטע. אז לפי תכונת ערך הבינים של

Cauchy, קימת נקודה אחת לפחות בקטע שתסומן c, כך שמתקיים

$F(c)=0$.

נסמן $a_0=a,\ b_0=b$. נביט על $c_0=(a+b)/2$. קימות שלש אפשרויות

ביחס ל- $f=f(c_0)$: $f=0$, $f>0$ ו- $f<0$.

במקרה א (היה לנו מזל), וסימנו.

במקרה ב, נעבר לשני תתי מקרים:

מקרה ב- 1 , $f(a)>0$. אז נגדיר תת קטע חדש: $[a_1=c_0,b_1=b_0]$. בתוך

קטע זה מתקימות ההנחות $f(a_1)f(b_1)<0$, ולכן בצענו שלב איטרטיבי.

מקרה ב- 2 , $f(a)<0$. אז נגדיר תת קטע חדש: $[a_1=a_0,b_1=c_0]$. בתוך

קטע זה מתקימות ההנחות $f(a_1)f(b_1)<0$, ולכן בצענו שלב איטרטיבי.

מקרה ג דומה.

23-12-2001-03

תנאי עצירה: נתון $\varepsilon>0$. נעצר את האיטרציה באחת משתי
האפשרויות הבאות. א- $b_n-a_n<\varepsilon$ ב- $f(c_n)<\varepsilon$.

דוגמא

נביט על המשואה $x^2-2=0$. כמובן שאנו יודעים לפתור אותה, אבל נפתר פתרון נומרי: נבחר את הקטע [1,2]. אז $f(1)<0$, $f(2)>0$ והפונקציה רציפה, ולכן אפשר להפעיל את השיטה. אז $c=(a+b)/2=3/2$, $f(3/2)>0$, ולכן $\sqrt{2}$ נמצא בקטע [1,1.5] שארכו חצי מהאורך של הקטע המקורי, כראוי בשיטת החציה.

שיטת המיתר

ישנה מגרעת בשיטת החציה, והיא שאנו מתעלמים מ-$f(c)$ עצמו ומתיחסים רק אל הסימן שלו. למשל בקטע [1,2], הפונקציות x^2-2 ו-x^2-3 שקולות כיון שבשתיהן $f(1)<0$, $f(2)>0$, למרות שערכי הפונקציות שונים ב- $x=1,x=2$. שיטת המיתר עדיפה על שיטת החציה במובן ש $f(a)$, $f(b)$ עצמם, ולא רק הסימן שלהם, משתתפים בקביעת הנקודה הבאה:

הרעיון הפשוט הוא להביט במיתר העובר דרך הנקודות $(a,f(a))$ ו- $(b,f(b))$, (זהו ישר האינטרפולציה), שמשואתו

$$f(a)+\frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

ולהביט על נקודת החתוך שלו עם ציר x. נקודה זו תהיה הקרוב

הבא לשרש. נחשב ונקבל

$$x = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} =$$

$$\frac{a(f(b)-f(a)) - f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} =$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

ולכן נקבל את שיטת המיתר:

נתונה פונקציה רציפה f על הקטע [a,b] כך ש- $f(a)f(b)<0$. נגדיר

$x_0=a$, $x_1=b$ ו- $x_{n+1}=(x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n))/(f(x_{n-1})-f(x_n))$

תנאי עצירה: נתון $\varepsilon>0$. נעצר את האיטרציה באחת משתי

האפשרויות הבאות. א- $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ ב- $f(x_n)<\varepsilon$.

23-12-2001-02

דוגמה פתור ארבע איטרציות בשתי השיטות והשוה

אותן עבור הבעיה בקטע [1,2], והפונקציה x^2-2 .

תשובה. בשיטת החציה נקבל:

$[a_0=1,b_0=2]$, $[a_1=1,b_1=1.5]$, $[a_2=1.25,b_2=1.5]$, $[a_3=1.375,b_3=1.5]$,

$[a_4=1.375,b_4=1.4385]$,

בשיטת המיתר נקבל:

$x_0=1$, $x_1=2$, ו-

$$x_2=(x_1f(x_0)-x_0f(x_1))/(f(x_0)-f(x_1))=(2(-1)-1(2))/(-1-2)=-4/-3$$

$$x_3=(x_2f(x_1)-x_1f(x_2))/(f(x_1)-f(x_2))=$$
$$((4/3)2-2(-2/9))/(2+(2/9))=28/20=1.4$$

$$x_4=(x_3f(x_2)-x_2f(x_3))/(f(x_2)-f(x_3))=$$
$$((1.4)(-2/9)-(4/3)(-1/25))/((-2/9)+(1/25))=58/41=1.414634146$$

וכבר בשלב הרביעי יש לשיטת המיתר יתרון מבהק על שיטת

החציה.

שיטת המשיק-שיטת ניוטון-רפסון:

נביט בנוסחה של שיטת המיתר, ונציב $a=x_n$, $b=x_{n-1}$. נקבל

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}}$$

כעת נשים לב כי המכנה בבטוי האחרון קרוב מאוד לנגזרת

באחת משתי הנקודות הללו. למען הפשטות נעדיף את x_n, ונקבל.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

זוהי הנוסחה של שיטת ניוטון רפסון.

יתרון וחסרון הנוסחה החדשה:

יותר פשוטה, הנקודה החדשה תלויה רק בקודמת לה.

יותר פרטית כי מניחה שהפונקציה גזירה, וקודם הנחנו שהפונקציה

רציפה בלבד.

מקור השם שיטת המשיק:

נביט על הישר המשיק לפונקציה בנקודה x_n, ונחשב את נקודת

החתוך שלו עם ציר x. נקבל כי משואת המשיק היא

$y=f(x_n)+f`(x_n)(x-x_n)$ ולכן נקודת החתוך שלה עם ציר

x היא $x_n-(f(x_n)/f`(x_n))$, כמו בשיטת ניוטון רפסון.

דוגמה פתור ארבע איטרציות בשיטת המשיק והשוה

אותה לשיטות הקודמות עבור הבעיה בקטע [1,2], והפונקציה x^2-2
24-12-2001-01

תשובה

$x_{n+1}= x_n -(f(x_n)/f`(x_n))= x_n -((x_n^2-2)/2x_n)=$
$(2x_n^2-(x_n^2-2))/(2x_n)=(x_n^2+2)/(2x_n)$,

לכן נקבל ע"י הצבת $x_0=1$, $x_1=3/2$, $x_2=((9/4)+2)/3=17/12=1.4166$,

$x_3=((289/144)+2)/(17/6)=(289+288)/(17\cdot 24)=$
$577/408=1.414215686$,

$x_4=((332929/166464)+2)/(577/204)$
$=(332929+332928)/(577\cdot 816)=665857/470832=1.414213562$

נשים לב כי זוהי התשובה במחשבון של גיורא עבור $\sqrt{2}$.

כלומר שיטת ניוטון רפסון נראית עדיפה על פני שתי השיטות

הקודמות, לפחות במקרה זה.

נביט על $e_n=\sqrt{2}- x_n$. נשתמש בערך של $\sqrt{2}$ מן המחשבון. נקבל:

$e_0=0.4142$, $e_1=-0.0833$, $e_2=-0.0023$, $e_3=-0.000002124$, $e_4=-0.000000000$. אנו רואים כי הסדרה הזו שואפת ל- 0 מהר,

נביט על $e_n=\sqrt{2}- x_n$. נשתמש בערך של $\sqrt{2}$ מן המחשבון, ובסדרת

x_n של שיטת המיתר. נקבל:

$e_0=0.4142$, $e_1=0.5858$, $e_2=0.0809$, $e_3=-0.0142$,

$e_4=-0.0004205$

ואנו מבינים כי שיטת ניוטון רפסון טובה יותר משאר השיטות.

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

עבור הפונקציה x^2-3 חשב ארבע איטרציות בשיטת

1 . החציה עם הקטע [1,2].

2 . המיתר עם $x_0=1$, $x_1=2$. חשב את e_0, e_1, e_2, e_3, e_4,

3 . ניוטון רפסון עם $x_0=1$. חשב את e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

30-12-2001-03

איך בודקים איכות של שיטה בצורה כללית, לא על ידי דוגמאות

מספריות? נשים לב כי בדוגמה הקודמת השונו את אברי הסדרה

המתכנסת לגבול $\sqrt{2}$. איך אפשר לדבר על מהירות התכנסות

של שיטה בלי לדעת מראש את גבול הסדרה? על כך נלמד

בנושא של שיטת נקודות השבת.

שיטת נקודות השבת

נביט במשואה $f(x)=x^2-2=0$. נוסיף x לשני האגפים ונקבל $g(x)=x^2+x-2=x$. כל שרש של f הוא גם פתרון של $g(x)=x$, ולהפך, כל פתרון של $g(x)=x$ הוא גם שרש של f. פתרון של $g(x)=x$ קרוי נקודת שבת של g, כיון ש-x יושבת במקומה למרות הפעולה של g .

נביט שוב במשואה $x^2-2=0$, נעביר אגפים ונקבל $x^2=2$, ולכן $h(x)=2/x=x$, כלומר, כל שרש של f הוא גם נקודת שבת של h.

כלומר לאותה פונקציה f, תתכנה כמה פונקציות g שונות כך ששרש של f שקול לנקודת שבת של g.

דוגמה

נביט במשואה $x^3-9x^2+20x-12=0$ אותה פתרנו בכתה (ויצא כי $x=6$ הוא פתרון), ונמצא לה פונקציות שונות עבורן כל שרש של f הוא נקודת שבת.

אפשרות א

$x^3-9x^2+20x-12=0$ ולכן $x^3=9x^2-20x+12$ ולכן $g(x)=\sqrt[3]{(9x^2-20x+12)}$. הכונה לשרש שלישי. נשים לב כי $g(6)=6$, כלומר 6 היא נקודת שבת של g. כנ"ל 1 ו- 2 הם שרשים של f ונקודות שבת של g.

אפשרות ב

$x^3-9x^2+20x-12=0$, ולכן $9x^2= x^3+20x-12$, ולכן

$x^2 = (x^3+20x-12)/9$, ולכן $h(x)= \sqrt{(x^3+20x-12)/9}$. נשים לב כי

$h(6)=6$, כלומר 6 היא נקודת שבת של h.

אפשרות ג

$x^3-9x^2+20x-12=0$, ולכן $20x = -x^3+12+9x^2$, ולכן

$x = (12+9x^2- x^3)/20$, ולכן $k(x)= (12+9x^2- x^3)/20$. נשים לב כי

$k(6)=6$, כלומר 6 היא נקודת שבת של k.

30-12-2001-02

ויש עוד אופציות אחרות.

שעורי בית להגשה בכתב תוך שבוע

הבט בפולינום $x^3-12x^2+35x-24=0$ (שהיה בשעורי הבית לפני שבוע) ומצא עבורו שלש פונקציות שונות שעבורן כל שרש שלו הוא נקודת שבת.

פתרון איטרטיבי של בעית נקודת שבת

נתונה בעית נקודת שבת $g(x)=x$, וננחש עבורה איזשהו x_0. נגדיר

תהליך איטרטיבי על-ידי $x_{n+1}= g(x_n)$. האם התהליך מתכנס?

דוגמה

נביט על המשואה $x^3-9x^2+20x-12=0$, וכמו בדוגמה הקודמת נחלץ

ממנה שלש משואות נקודות שבת. נציב $x_0=0$. נקבל עבור

$g(x)= \sqrt[3]{9x^2-20x+12}$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{12} = 2.2894,\\
x_2 &= \sqrt[3]{9x_1^2 - 20x_1 + 12} = 2.37430\\
x_3 &= 2.47982,\\
x_4 &= 2.60851\\
x_5 &= 2.76193\\
x_6 &= 2.94014
\end{aligned}
$$

נשים לב כי הסדרה נראית מתבדרת.

נקבל עבור $h(x)= \sqrt{(x^3+20x-12)/9}$. ו $x_0=3$ כי:

$$x_1 = \frac{\sqrt{27+60-12}}{3} = \frac{\sqrt{75}}{3} = 2.88675$$

$$x_2 = 2.784706$$

$$x_3 = 2.693373$$

$$x_4 = 2.612064$$

$$x_5 = 2.5399713$$

נשים לב כי זו נראית סדרה מתכנסת.

נמשיך קצת את הסדרה. $x_{12}=2.225102138$, וכן $x_{20}=2.084821708$

ניתן לנחש כי הגבול הוא 2 , ואכן 2 היא נקודת שבת של h.

נקבל עבור $k(x)= (12+9x^2- x^3)/20$ ו $x_0=0$ כי:

$x_1=0.6$, $x_2=0.7512$, $x_3=0.8327$, $x_4=0.8831$, $x_5=0.9165$, $x_6=0.9395$, $x_7=0.9557$, $x_8=0.9674$, $x_9=0.9758$, $x_{10}=0.9820$, $x_{11}=0.9866$, $x_{12}=0.99004$,

ונראה כי הסדרה מתכנסת לנקודת השבת 1 .

נתונות פונקציות שונות עם בעית נקודת השבת המתאימות לאותה משואה. מי מהן טובה יותר? איך מודדים איכות של שיטה? איך כל זה קשור לשיטת ניוטון רפסון?

נמדד איכות בצורה הבאה. ננחש את נקודת השבת בשתי הדוגמאות

הקודמות ונחשב את הסדרות e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 כמקדם .

עבור המקרה של g. נקודת השבת s=1, ולכן

$e_0=-1, e_1=1.2894, e_2=1.3743, e_3=1.479, e_4=1.6085 ,e_5=1.7619$

נשים לב כי הסדרה e_n הולכת וגדלה. דרך אחת למדד זאת

היא על ידי הבטה בסדרת המנות $q_n = e_{n+1} /e_n$. נשים לב כי

$q_1=1.06584, q_2=1.07618, q_3=1.0875, q_4=1.0953.$ כלומר המנות

אומרות כי כל הפרש (e) קצת גדול יותר מהקודם לו.

כעת עבור המקרה של h. נקודת השבת s=2, ולכן

$e_0=1, e_1=0.88675, e_2=0.784706, e_3=0.693373 ,$
$e_4=0.612064 ,e_5=0.5399713$

נשים לב כי הסדרה e_n הולכת וקטנה. דרך אחת למדד זאת

היא על ידי הבטה בסדרת המנות $q_n = e_{n+1} /e_n$. נשים לב כי

$q_0=0.88675, q_1=0.88492, q_2=0.88360, q_3=0.88273,$
$q_4=0.882213.$

כלומר המנות אומרות כי כל הפרש (e) הוא בערך 88% מהקודם לו.

כעת עבור המקרה של k. נקודת השבת s=1, ולכן

$e_0=1, e_1=0.4, e_2=0.2488, e_3=0.1673,$
$e_4=0.1169 ,e_5=0.0835, e_6=0.0605 ,e_7=0.0443, e_8=0.0326$
$,e_9=0.0242, e_{10}=0.0180, e_{11}=0.0134, e_{12}=0.00996,$

נשים לב כי הסדרה e_n הולכת וקטנה. דרך אחת למדד זאת

היא על ידי הבטה בסדרת המנות $q_n = e_{n+1} / e_n$. נשים לב כי

$q_0=0.4$, $q_1=0.622$, $q_2=0.6724$, $q_3=0.6987$, $q_4=0.7142$, $q_5=0.7245$, $q_6=0.7322$, $q_7=0.7358$, $q_8=0.7423$, $q_9=0.7438$, $q_{10}=0.7444$, $q_{11}=0.7432$.

כלומר המנות אומרות כי כל הפרש (e) הוא פחות מ 75%

מהקודם לו. נשים לב גם כי הסדרה q שואפת לגבול קבוע.

מתי בעית השבת $g(x)=x$ הצמודה למשואה $f(x)=0$ היא טובה?

תשובה לכך נקבל מהמשפט הבא.

משפט

נתונה בעית השבת $g(x)=x$, נבחר x_0 באופן שרירותי, ונגדיר

באינדוקציה $x_{n+1}= g(x_n)$. נגדיר $e_n= x_n-s$. נגדיר $q_n = e_{n+1} /e_n$.

נניח כי g גזירה בקטע המכיל את נקודת השבת s ואת הנקודות

x_n ו- x_{n+1}. אז קימת נקודה אחת לפחות באותו קטע c_n כך ש

מתקים השויון $g'(c_n) = e_{n+1} /e_n$.

31-12-2001-01

דוגמאות קודמות

בדוגמה עם g ראינו כי כל האיברים q היו גדולים מ- 1 . הקטע

המתאים הוא בין 0 ו- 3 . נחשב את

$g'(x)=(18x-20)/3(\sqrt[3]{(9x^2-20x+12)^2})$. לא נבצע חקירה מלאה,

ונציב כמה ערכים של x.עבור x=0 נקבל $g'(0)=(-20)/3(\sqrt[3]{(12)^2})$,

כלומר $g'(0)=-1.93857$, ועבור x=1 נקבל

$g'(1)=(18-20)/3(\sqrt[3]{(9-20+12)^2})=(-2)/3=-2/3$,

ועבור x=2 נקבל

$g'(2)=(36-20)/3(\sqrt[3]{(36-40+12)^2})=(-4)/12=-1/3$,

ועבור x=3 נקבל

$g'(3)=(54-20)/3(\sqrt[3]{(81-60+12)^2})=(34)/12=1.10$,

כלומר הדוגמה הזו לא הצליחה.

נעבור כעת ל- h'. נקבל כי $h'(x)=(3x^2+20)/(3\cdot 2\sqrt{(x^3+20x-12)})$,

ושוב נציב נקודות והפעם בקטע [2,3]. נקבל

$h'(2)=(12+20)/(3\cdot 2\sqrt{(8+40-12)})=32/6\cdot 6=0.88888$

$h'(3)=(27+20)/(3\cdot 2\sqrt{(27+60-12)})=47/6\sqrt{75}=0.9045$

ואכן המנות היו קרובות ל- 0.88.

נעבור למקרה השלישי של k . שוב נגזר ונקבל

$k'(x)=(18x-3x^2)/20$. נציב בקטע [0,1] ונקבל :

$k'(0)=(0)/20=0$, $k'(1)=(18-3)/20=0.75$.

ואכן רואים כי המנות לא עוברות את 0.75.

הוכחת המשפט

נסתמך על תכונת ערך הבינים של Lagrange. נקבל כי

$e_{n+1}= x_{n+1}-s=g(x_n)-g(s)=g'(c_n)(x_n -s)= g'(c_n)\, e_n$

ולכן נחלק ב- e_n ונקבל את הדרוש.

קשר עם שיטת ניוטון רפסון

נביט על שיטת ניוטון רפסון $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ונשים לב כי אם נגדיר $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

אז מתקים, $$x_{n+1} = g(x_n)$$ ולכן שיטת ניוטון רפסון

היא שיטת נקודת שבת עבור g זו, ולכן המשפט הקודם

תקף. אם נניח כי f גזירה פעמים, אז g גזירה ונגזרתה

היא $$1-\frac{f'^2-f''f}{f'^2}=1-1+\frac{f''f}{f'^2}=\frac{f''f}{f'^2}$$ ולכן

אם נניח

כי s הוא שרש של f אך לא של f’, נובע כי $$g'(s) = \frac{f''(s)f(s)}{f'(s)^2} = 0$$

6-1-2002-03

ולכן שיטת ניוטון רפסון היא כזו שבה מנת ה- e שואפת ל- 0 .

דוגמה

נמשיך את הדוגמה מעמוד 12 , שם הבטנו במשואה $x^2 - 2 = 0$,

עבור $x_0=1$, שם חשבנו את הסדרה e_n. נעתיק את הסדרה ונחשב את

המנות . נקבל $q_n = \dfrac{e_{n+1}}{e_n}$

$q_0=-0.20111$, $q_1= 0.02761$, $q_2=0.0009234$, $q_3=0$

ואכן זו סדרה השואפת מהר ל- 0 .

שיטות מסדר שני

כל בעית שבת $x_{n+1}=g(x_n)$ שבה מתקים $g'(s)=0$ נקראת

בעיה מסדר שני. שיטת ניוטון רפסון היא מסדר שני. ישנה

דרך נוספת להעריך שיטה מסדר שני, תוך שמוש בנוסחת טיילור

מסדר ראשון עם שארית לגרנז'. נפתח את הטור סביב נקודת השבת s.

$$g(x) = g(s) + g'(s)(x-s) + \frac{g''(c)(x-s)^2}{2}$$

נעביר איבר וכן נציב $x=x_n$. נקבל

$$g(x_n)-g(s)=g'(s)(x_n-s)+\frac{g''(c)(x_n-s)^2}{2}$$

נציב $g'(s)=0$,$x_n-s=e_n, g(x_n)=x_{n+1}, g(s)=s$ ונקבל:

$$x_{n+1}-s=\frac{g''(c){e_n}^2}{2}$$

נציב $x_{n+1}-s=e_{n+1}$ נעביר אגפים בחלוק ונקבל :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2}=\frac{g''(c)}{2}$$

כלומר המנות $r_n=e_{n+1}/\ e_n^2$ אמורות לשאוף לבטוי

$g''(c\ )/2$. נבדק שוב את התוצאה של ניוטון רפסון עבור $x_5-s=0$

ונקבל את המנות הבאות

$r_0=-0.48553$,$r_1= 0.33146$, $r_2=0.40151$, $r_3=0$

6-1-2002-02

האחרונה שגויה ונובעת מהעובדה שלמחשבון יש מספר

ספרות סופי. הסדרה r_n שואפת ל- $g''(c\ )/2$. כבר ראינו כי

$g'=ff''/(f')^2$, ולכן נגזר עוד פעם נחלק ב- 2 ונקבל

$$g''=\frac{(ff'''+f'f'')f'^2-2f'f''ff''}{f'^4}=\frac{ff'f'''+f'^2\ f''-2ff'f''^2}{f'^3}$$

נזכר כי $f(s)=0$, נציב וכן נחלק ב- 2 ונקבל:

$$\frac{g''(s)}{2}=\frac{f''(s)}{2f'(s)}$$

נציב $f=x^2-2,\ f'=2x,\ f''=2,\ s=\sqrt{2}$ ונקבל:
$g''(s)/2=2/2(2\sqrt{2})=1/2\sqrt{2}=0.3535$

ואכן שלש המנות השונות מ- 0 היו בערך מוחלט קטן מ- 1 .

7-1-2002-01

שעורי בית להגשה בכתב עוד שבוע

הבט במשואה $x^3-12x^2+35x-24=0$ (תרגיל להגשה שהיה ומופיע

בעמוד 6)

מצא שרש של המשואה עד רמת דיוק 0.01 בשיטות הבאות

בשיטת החציה על ידי $a=0,\ b=9$.

שיטת המיתר על ידי $x_0=0,\ x_1=9$.

שיטת המיתר על ידי $x_0=9,\ x_1=0$.

שיטת ניוטון רפסון על ידי $x_0=0$.

שיטת ניוטון רפסון על ידי $x_0=9$.

עבור כל שיטה למעט הראשונה, חשב את ההפרשים $e_n=x_n-s$,

את המנות $q_n=e_{n+1}/e_n$ ואת המנות $r_n=e_{n+1}/e_n^2$. עבור שתי

השיטות האחרונות, חשב את $g''(s)/2$.

תרגיל נוסף $x^3+7x^2+x-9=0$

13-1-2002-03

שיטות נקודות שבת מסדר גבוה יותר

בעית השבת $x_{n+1}=g(x_n)$ שבה מתקיים $g'(s)=0=g''(s)$ נקראת

מסדר שלישי, וכן הלאה. ככל שהשיטה מסדר גבוה יותר, מהירות

ההתכנסות **יכולה** להיות יותר גבוהה, אבל הסדרה יכולה גם

להתבדר.

שיטה מסדר גבוה-הגדרה יותר כללית

סדרה e_n נקראת מסדר k אם הסדרה e_{n+1}/e_n^k חסומה בין

שני מספרים חיוביים L, ו- M (לאחר מקום מסוים).

כלומר מתקיים לכל $n>N0$ כי $M< e_{n+1}/e_n^k <L$.

הגדרה שקולה: לכל n>N0 $M e_n^k < e_{n+1} < L e_n^k$

אינטואיציה: ההגדרה מזכירה את ההגדרה של O(k).

ככל שהשיטה מסדר גבוה יותר, היא עושה הכל יותר מהר.

מתכנסת, או מתבדרת, יותר מהר.

משפט: נתונה שיטת נקודת שבת ונתון כי e_n שואפת ל- 0 .

נתון כי $g'(s)=g''(s)=\ldots= g^{k-1}(s)=0<g^k(s)$.אז השיטה מסדר k
.

הוכחה

נכתב את טור טיילור מסדר k-1 עם שארית לגרנז מסדר k,

בנקודת ההשקה s.

$$g(x) = g(s) + g'(s)(x-s) + \cdots + \frac{g^{k-1}(s)(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{g^k(c)(x-s)^k}{k!}$$

נציב את הנתון $g'(s)=g''(s)=\ldots= g^{k-1}(s)=0\neq g^k(s)$. ונקבל:

$$g(x) - g(s) = \frac{g^k(c)(x-s)^k}{k!}$$

נציב $e_n=x_n-s$, $g(s)=s$, $x_{n+1}=g(x_n)$, $x= x_n$, ונקבל:

$$e_{n+1}=\frac{g^k(c)e_n{}^k}{k!}$$

נחלק ונקבל

$$\frac{e_{n+1}}{e_n{}^k}=\frac{g^k(c)}{k!}$$

כיון שנתון שהסדרה מתכנסת, הנקודות c שואפות ל s
13-1-2002-02
ולכן החל ממקום מסוים נקבל כי המנה בצד שמאל

קרובה ל- $g^k(s)/k!$. המונה והמכנה חיוביים,

הרי ש- צד ימין חסום בין שני קבועים חיוביים הקרובים

לערך הבטוי בצד ימין.

דוגמה

נתונה הסדרה $e_n=10^{-n}$. מהו הסדר של הסדרה?

תשובה $e_{n+1}/e_n=10^{-n-1}/10^{-n}=10^{-1}=0.1$ ולכן זו סדרה מסדר 1 .

דוגמה

נתונה הסדרה $e_n=10^{-2n}$. מהו הסדר של הסדרה?

תשובה $e_{n+1}/e_n=10^{-2n-2}/10^{-2n}=10^{-2}=0.01$ ולכן זו סדרה מסדר 1 .

דוגמה

נתונה הסדרה. $e_n = 10^{-(2^n)}$ מהו הסדר של הסדרה?

תשובה

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{10^{-(2^{n+1})}}{10^{-(2^n)}} = 10^{2^n - 2^{n+1}} = 10^{-(2^n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן אין זו שיטה מסדר 1 .

$$\frac{e_{n+1}}{{e_n}^2} = \frac{10^{-(2^{n+1})}}{10^{-(2^n)-(2^n)}} = 10^{2^{n+1} - 2^{n+1}} = 10^0 = 1$$

ולכן זוהי שיטה מסדר 2

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

מצא נוסחה של סדרה מסדר 3 .

זהוי הסדר של השיטה

אם $r_n = e_{n+1}/\ e_n^k$ שואף לקבוע L , אז השיטה מסדר k. אם

השיטה מסדר k ומתכנסת ונביט על $r_n = e_{n+1}/\ e_n^j$, אז אם

j=k, הגבול הוא קבוע. אם j>k, חלקנו ביותר מדי אפסים

והגבול הוא ∞ . אם j<k, חלקנו בפחות מדי אפסים

והגבול הוא 0 .

נורמה- ארך של וקטור ושל מטריצה

נתון המספר המרכב $z=x+iy$. מהו ארכו? ידוע שזהו $\sqrt{x^2+y^2}$

אם נתון וקטור $v=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$, נוכל להגדיר גם לו ארך ונסמן:

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

אורך זה יקרא הנורמה של v.

מהן תכונות הנורמה?

לכל v, $\|v\|\geq 0$. תכונה זו ברורה כי סכום רבועים הוא תמיד אי שלילי, ושרש של מספר אי שלילי הוא אי שלילי.

$\|v\|=0\Rightarrow v=0$. ואכן אם השרש הוא אפס, כך גם מה שמתחת לשרש, ולכן סכום הרבועים הוא אפס, ולכן גם כל רכיב הוא 0 .

$v=0\Rightarrow\|v\|=0$. זו תכונה ברורה.

נסכם את כל התכונות עד כאן באקסיומה אחת:

אקסיומה 1 : לכל v, $\|v\|\geq 0$. $\|v\|=0\Leftrightarrow v=0$.

נניח כי a הוא סקלר. נחשב:

$$\|av\| = \sqrt{(ax_1)^2 + (ax_2)^2 + \cdots + (ax_n)^2} =$$
$$\sqrt{a^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = |a| \cdot \|v\|$$

אי השויון של Cauchy-Schwartz הוא שלב בהוכחת האקסיומה

הבאה. נתונים שני וקטורים, $v=(x_1,x_2,\dots,x_n),w=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$

לכל סקלר a, נביט על הוקטור av+w ונחשב את ארכו.

$$\|av+w\|^2 = (ax_1+y_1)^2 + (ax_2+y_2)^2 + \cdots + (ax_n+y_n)^2$$
$$= a^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2a(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$$
$$+ (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = a^2\|v\|^2 + 2av\cdot w + \|w\|^2 \geq 0$$

כיון שזוהי פונקציה רבועית במשתנה a ואי שלילית בערכה

הדסקרימיננט Δ חיב להיות אי חיובי כלומר מתקים

$\Delta=4(v\cdot w)^2-4\|v\|^2\|w\|^2\leq 0$, או $|(v\cdot w)| \leq \|v\|\cdot\|w\|$, וזהו

אי שויון קושי שורץ.

כעת נחשב את רבוע הנורמה של הוקטור v+w. נוכל להציב

a=1 בהוכחת אי שויון קושי-שורץ ונקבל:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2v\cdot w + \|w\|^2 \le$$
$$\|v\|^2 + 2|v\cdot w| + \|w\|^2 \le$$
$$\|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2$$

נוציא שרש ונקבל את אי שויון המשולש:

$$\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$$

אי השויון נקרא כך כיון שאם נביט בשני וקטורים, u,v, אז

הוקטור v+w יוצר אתם משלש וארכו קטן מסכום ארכיהם.

אקסיומות הנורמה:

הנורמה היא פונקציה $\|\,\|:R^n\to R$, המקימת את שלש האקסיומות

הבאות:

1. לכל $v\in R^n$, $\|v\|\ge 0$ $\|v\|=0 \Leftrightarrow v=0$.
2. לכל $a\in R$, $v\in R^n$, $\|av\|=|a|\,\|v\|$.
3. לכל $w,v\in R^n$, $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$.

14-1-2002 סוף החומר של הקורס
נורמה של מטריצה

נתונה מטריצה רבועית $A_{n\times n}$. מהי צורה טובה להגדיר נורמה שלה?

כמובן שאפשר להביט על A כעל וקטור של n^2 מספרים ואפשר

לחשב את הנורמה של הוקטור. אולם בצורה זו אנו מתעלמים

מהתפקיד של A כפונקציה לינארית, $R^n \to R^n$.

דוגמה

נביט במטריצה $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$ ובוקטור $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. אז

מתקים כי $Av = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, ונוכל לחשב את הנורמות.

אז ||v||=5 וכן ||Av||=13 ,ואם נחשוב פי כמה הגדילה A את

הנורמה של v, הרי ש- ||Av||/||v||=13/5=2.6. נביט גם על

$w = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, ועל $Aw = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix}$.

אז ||w||=13 וכן ||Aw||=25 . ואז ||Aw||/||w||=25/13=1.923.

נשאלת השאלה מהו היחס המקסימלי ||Au||/||u|| עבור כל

וקטור אפשרי ב- R^2. היינו רוצים להגדיר

$$\|A\| = \max_{v \in R^n} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

הבעיה בהגדרה זו היא שלא בטוח שלקבוצה בעלת אינסוף איברים

יש מקסימום. לכן נגדיר:

$$\|A\| = \frac{\sup}{v \in R^n} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

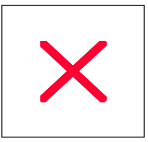
דוגמה

נביט במטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

ונחשב את הנורמה שלה.

ננסה להפעיל אותה על הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

בעל המכפלה $Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\|Av\|/\|v\|=2/1=2$. כעת



נפעיל אותה על הוקטור $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

ולכן $\|Aw\|/\|w\|=3/1=3$.

כעת נקח וקטור כלשהו

ולכן $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, Au = \begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix}$

$\|Au\|/\|u\|=\sqrt{(4a^2+9b^2)}/\sqrt{(a^2+b^2)}=\sqrt{(4a^2+(4+5)b^2)}/\sqrt{(a^2+b^2)}=$
$\sqrt{(4a^2+4b^2+5b^2)}/\sqrt{(a^2+b^2)}=\sqrt{(4+5(b^2/(a^2+b^2)))}$

הבטוי הזה יקבל ערך מקסימלי ככל ש- המנה $b^2/(a^2+b^2)$ תגדל.

מנה זו תקבל ערך מקסימלי כאשר $b=1$, ואז $\|Au\|/\|u\|=3$. לכן

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

נתונה מטריצה אלכסונית 2×2. חשב מהי הנורמה שלה. נמק את התשובה.

תכונות נורמת המטריצות.

התכונות הבאות נכונות לנורמת המטריצות:

נורמות המטריצות מקימות את אקסיומות 1-3 .

הוכחת 1

לכל v, המונה והמכנה של הבטוי $(\|A\cdot v\| / \|v\|)$ הם אי שליליים, ולכן גם המנה היא אי שלילית, ולכן גם ה-Sup של המנות, וזוהי הנורמה. לכן $\|A\|\le 0$. נניח כי $\|A\|=0$. אז ה-Sup של המנות האי שליליות הוא 0 , ולכן כל אחת מהמנות היא 0 , ולכן כל אחד מהמונים הוא 0 , ולכן לכל v, מתקים $\|A\cdot v\|=0$.

לפי אקסיומה 1 של הנורמה עבור וקטורים נובע כי $A\cdot v=0$.

לכן $A=0$. אם נתון כי $A=0$, אז לכל v, $A\cdot v=0$, ולכן לכל v, מתקים $\|A\cdot v\|=0$. ולכן לכל v, מתקים $\|A\cdot v\| / \|v\|=0$.

לכן ה- Sup הוא על קבוצה של אפסים ויוצא 0 .

הוכחת 2 .

$$\|bA\| = \sup \frac{\|bAv\|}{\|v\|} = \sup \frac{|b|\|Av\|}{\|v\|} = |b| \sup \frac{\|Av\|}{\|v\|} = |b|\|A\|$$

הוכחת 3 .

חסר חסר

4. לכל $A\in M_n$, $v\in R^n$ מתקיים, $||A\cdot v|| \le ||A|| \cdot ||v||$.

הוכחה

בהיות $||A||=\sup$, הרי שמתקיים כי היא גדולה שוה לכל אחת מהמנות

ולכן מתקיים אי השויון $||A||\le(||A\cdot v|| / ||v||)$השקול לתכונה 4.

5 . קים v עבורו $||A\cdot v|| =||A||\cdot||v||$. מסקנה: בהגדרה של $||A||$,

אפשר להחליף את המלה Sup במלה Max.

הוכחה

ההוכחה חורגת מחמר הקורס. היא מוכחת בקורס טופולוגיה.

משתמשים בתכונה הנקראת קומפקטיות.

6 . זוהי תכונת עזר עבור ההוכחות שבהמשך

$$\frac{\|A(bv)\|}{\|bv\|} = \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

לנוחיות התלמידים רכזתי לכאן את כל הטקסט שעסק במשפטים

והוכחתם

ולמדנו בקורס באינפי את נוסחת טיילור עם שארית.

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+(f''(a)h^2)/2+\ldots+(f^{(n)}(a)h^n)/n!+R_n(a,h)$$

כאשר $R_n(a,h)$ היא השארית של פתוח טיילור וקימות לה מספר נוסחאות, למשל נוסחת השארית של Lagrange, (שם שיופיע הרבה בנושא הקרוב).

$$R_n(a,h)=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

וכאשר c היא נקודת בינים בין a ובין a+h.

המשפט הבא הוא סכום של הדוגמאות הקודמות. כדי לנסח אותו נצטרך להשתמש בסימונים. נניח כי נתונות נקודות $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ ורשימת ערכיהם על-ידי
f, $f(x_0),\ldots,f(x_n)$, ואנו שואלים האם ניתן לבנות על סמך נקודות אלו פונקציה העוברת דרכן. הדוגמאות הקודמות מתאימות למקרים n=1,2.

משפט פולינום האינטרפולציה.

קימת פונקציה p בעלת התכונות הבאות.

1 . p עוברת בכל הנקודות הקודמות, כלומר לכל i, $p(x_i)=f(x_i)$.

2 . p היא פולינום שדרגתו קטנה או שוה ל-n.

3 . p היא יחידה בעלת התכונות הקודמות.

פונקציה p זו קרויה פולינום האינטרפולציה של הנקודות $x_0,f(x_0)), \ldots(x_n,f(x_n)))$.

הוכחת משפט האינטרפולציה:

קיום פולינום p ממעלה קטנה או שוה ל- n, פרושו שישנם $n+1$ מקדמים ממשיים $a_0, a_1, \ldots, a_n$, כך ש $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$. נציב את $n+1$ הנקודות ונקבל מערכת לינארית $(n+1)x(n+1)$.

$$\left\{\begin{matrix} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n {x_0}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n {x_1}^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n {x_n}^n = f(x_n) \end{matrix}\right\}$$

קיום פולינום יחיד ממעלה קטנה או שוה n פרושו שמטריצת המקדמים של המערכת הקודמת, הפיכה. נסמן:

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

נביט על $vdm(x_0,x_1)$. זהו הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$$

וידוע כי הדטרמיננט הוא $(x_1 - x_0)$.
ון דר מונדה 3x3

נביט על $vdm(x_0,x_1,x_2)$. זהו הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \end{pmatrix}$$

נבצע את הפעולות S3-S1→S3 ,S2-S1→S2 אשר אינן משנות את

$$\begin{matrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & {x_1}^2 - {x_0}^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & {x_2}^2 - {x_0}^2 \end{matrix}$$

ערך הדטרמיננט, ונקבל את המטריצה:

אם נפתח לפי עמודה ראשונה, נקבל כי הדטרמיננט הוא של

המטריצה 2x2, שממנה אפשר להוציא גורם משותף מכל שורה ונקבל כי.

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע את הפעולה על העמודות אשר אינה משנה את הערך

של הדטרמיננט $A2 - x_0A1 \rightarrow A2$. נקבל כי הדטרמיננט הוא:

$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$.

ון דר מונדה 4x4

נביט על $vdm(x_0, x_1, x_2, x_3)$. זהו הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & x_0^{\ 3} \\ 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & x_1^{\ 3} \\ 1 & x_2 & x_2^{\ 2} & x_2^{\ 3} \\ 1 & x_3 & x_3^{\ 2} & x_3^{\ 3} \end{matrix}$$

נבצע את הפעולות $S2-S1 \rightarrow S2$, $S3-S1 \rightarrow S3$, $S4-S1 \rightarrow S4$

אשר אינן משנות את הדטרמיננט. נקבל את

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & x_0^{\ 3} \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^{\ 2} - x_0^{\ 2} & x_1^{\ 3} - x_0^{\ 3} \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^{\ 2} - x_0^{\ 2} & x_2^{\ 3} - x_0^{\ 3} \\ 0 & x_3 - x_0 & x_3^{\ 2} - x_0^{\ 2} & x_3^{\ 3} - x_0^{\ 3} \end{pmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שמאלית, נוציא קבועים מכל שורה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & {x_1}^2 + x_0 x_1 + {x_0}^2 \\ 1 & x_2 + x_0 & {x_2}^2 + x_0 x_2 + {x_0}^2 \\ 1 & x_3 + x_0 & {x_3}^2 + x_0 x_2 + {x_0}^2 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $A3\text{-}x_0A1 \rightarrow A3$ יהפך את העמודה הימנית לעמודה

של מטריצת ון דר מונדה. כנ"ל $A2\text{-}x_0A1 \rightarrow A2$ יהפך את העמודה

האמצעית לרצויה.

במקרה הכללי זוהי מטריצה $(n+1)X(n+1)$ הקרויה מטריצת ון-דר-מונדה Van-Der-Moonde והוכחת המשפט שקולה להוכחה כי vdm הפיכה או כי הדטרמיננט שלה שונה מ- 0 . נחשב את det(vdm) על ידי פעולות בין השורות והעמודות אשר אינן משנות את הערך של הדטרמיננט.

נחסר שורה שניה פחות ראשונה ואת שורת התוצאה נשים בשורה השניה.
נסמן פעולה זו בסימון $S2\text{-}S1 \rightarrow S2$ וכן נבצע את $S3\text{-}S1 \rightarrow S3$
.... $Sn\text{-}S1 \rightarrow Sn$. נקבל מטריצה חדשה אשר יש לה אותו דטרמיננט:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & {x_0}^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & {x_1}^n - {x_0}^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & \cdots & {x_n}^n - {x_0}^n \end{pmatrix}$$

כעת נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה ראשונה ונקבל:

$$\det(vdm)=\det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & \cdots & x_1{}^{x}-x_0{}^{n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n-x_0 & \cdots & x_n{}^{n}-x_0{}^{n} \end{pmatrix}$$

כעת נוציא מכל שורה קבוע: מהשורה הראשונה x_1-x_0 ומהאחרונה x_n-x_0 ונקבל:

$$\det(vdm)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_1{}^{x-1}+x_1{}^{n-2}x_0+\cdots x_0{}^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n{}^{n-1}+x_n{}^{n-2}x_0+\cdots x_0{}^{n-1} \end{pmatrix}$$

כעת נחשב את הדטרמיננט של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1+x_0 & \cdots & x_1{}^{n-1}+x_1{}^{n-2}x_0+\cdots+x_0{}^{n-1} \\ 1 & x_2+x_0 & \cdots & x_2{}^{n-1}+x_2{}^{n-2}x_0+\cdots+x_0{}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ 1 & x_n+x_0 & \cdots & x_n{}^{n-1}+x_n{}^{n-2}x_0+\cdots+x_0{}^{n-1} \end{pmatrix}$$

נפעל פעולות בין העמודות A_n-$x_0A_{n-1}\rightarrow A_n$, A_1-$x_0A_0\rightarrow A_1$ ונקבל

כי המטריצה הקטנה יותר היא:

$$m=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{\,n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{\,n-1} \end{pmatrix}$$

המטריצה הקטנה יותר היא עצמה מטריצת vdm. ולכן אם נסמן את מטריצת vdm על המשתנים $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ בסימון $vdm(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$ הוכחנו את הקשר הבא:

$$\det(vdm(x_0<x_1<\cdots<x_n)) =$$
$$(x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0)\det(vdm(x_1<\cdots<x_n))$$

נשתמש בסימון של האות $\prod$ אשר מסמנת מכפלה, והוכחנו באינדוקציה את המשפט הבא:

משפט דטרמיננט של מטריצת $vdm(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$

$$\det(vdm(x_0<x_1<\cdots<x_n)) = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

ולכן ביחוד, כיון ש- לכל i, j, , נתון כי $x_i-x_j\neq 0$ לכן $\det(vdm(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n))\neq 0$

ולכן הוכחנו את משפט פולינום האינטרפולציה.

ולכל j , $0 \le j \le n$ נגדיר

$$p_j(x) = \frac{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j - x_i)}$$

במקרה הכללי הפולינום של הנתונים שווה ל:
$f(x_0)p_0(x)+f(x_1)p_1(x)+\dots+f(x_n)p_n(x)$.

נניח כי נתונות הנקודות $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$ ורשימת ערכיהם על-ידי f $f(x_0),\dots,f(x_n)$, ונסמן ב- p את פולינום האינטרפולציה שהם קובעים.
אנו רוצים להביט בהפרש הקרוי גם שארית $e(x)=f(x)-p(x)$. נסמן גם סימונים שיעזרו במהלך ההוכחה:

נגדיר את $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$. פולינום זה מעלתו $n+1$, ולכן איננו חלק של פולינום האינטרפולציה.

משפט השארית

נניח כי f גזירה בקטע $[x_0,x_n]$ $n+1$ פעמים, וכי נגזרתה ה- $n+1$ -ית רציפה בקטע זה. אז לכל x בקטע, שאיננה שווה לאף נקודה x_i, קימת c_x בקטע כך שמתקיים:

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} w(x) =$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

הוכחת משפט השארית:

נביט על הבטוי:

$$\frac{f(x)-p(x)}{w(x)}=\frac{e(x)}{w(x)}=q(x)$$

זוהי פונקציה שמוגדרת בקטע, למעט הנקודות $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$, שם המכנה מתאפס. היא הפרש ומנה של פונקציות גזירות ברציפות n+1 פעמים בקטע, ולכן גם היא גזירה ברציפות n+1 פעמים בקטע.

נעביר אגפים ונקבל:

$$f(x)-p(x)-q(x)w(x)\equiv 0$$

זוהי זהות המתקבלת עבור כל נקודה בקטע.

תהי נקודה קבועה בקטע, ונביט על הפונקציה :

$$F(t)=f(t)-p(t)-q(x)w(t)$$

גם פונקציה זו היא גזירה ברציפות n+1 פעמים בקטע במשתנה שלה t, כיון שהיא סכום הפרש ומכפלות של פונקציות כאלו. לפונקציה F יש n+2 נקודות התאפסות בקטע. ראשית, לכל $t=x_i$, מתאפסת כיון ש- $f(x_i)=p(x_i)$ לפי תכונת פולינום האינטרפולציה, ו $w(x_i)=0$ לפי הגדרת w . בנוסף עבור t=x , $F(x)=0$ לפי הזהות שלמעלה. לכן יש ל- F n+2 נקודות התאפסות שונות. לפי משפט , לכל פונקציה גזירה, בין כל שתי נקודות התאפסות, קימת נקודת התאפסות של הנגזרת. לכן ל- F' יש n+1 נקודות התאפסות
שונות. נשתמש במשפט זה שוב. אז ל- F'' יש n נקודות התאפסות שונות, ל- F''' יש n-1 נקודות התאפסות שונות, וכדומה. נמשיך כך, כיון ש- F

גזירה $n+1$ פעמים, ונקבל כי ל- $F^{(n+1)}$ יש נקודת התאפסות אחת לפחות. נסמן אותה ב- c_x. אז מתקיים:

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - q(x)w^{(n+1)}(t)$$

כיון ש- $q(x)$ קבוע. כיון ש - p פולינום ממעלה n , מתקיים כי $p^{(n+1)}(x)=0$. כיון ש - w פולינום ממעלה $n+1$ ומקדמו המוביל שוה 1 מתקיים כי $w^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, ולכן נציב את c_x ונקבל:

$$0 = F^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - 0 - q(x)(n+1)!$$

או לאחר העברת אגפים:

$$q(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}w(x) \Leftrightarrow \frac{e(x)}{w(x)} = q(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

ונשים לב שזה שקול לטענה שצריך להוכיח:

זוהי נוסחת שיטת הטרפז: אם נבחר חלוקה שווה של הקטע

$h=x_1-x_0=\ldots=x_n-x_{n-1}$ אז נקבל את הנוסחה הבאה לשטח:

$$S=\frac{h}{2}((f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+\cdots((f(x_{n-1})+f(x_n))=$$

$$\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$

הערכת שגיאה

כיון שהקו הישר המחבר את $(a,f(a))$ עם $(b,f(b))$ הוא ישר

אינטרפולציה, הרי שאם f גזירה פעמים ברציפות בקטע, נוסחת

השארית מתקימת, ומאפשרת להעריך את f-p בקטע, ולכן גם את

$$\int_a^b (f(x)-p(x))dx$$

בצורה הבאה:

$$e=\int_a^b (f(x)-p(x))dx=\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)f''(c_x)}{2}dx$$

כאשר c_x נקודה לא ידועה בקטע.

הנחנו כי f גזירה פעמים ברציפות הרי שהיא חסומה בקטע.

לכן יש שני קבועים כך שמתקים אי השויון לכל נקודה בקטע:

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \int_{\frac{-(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} (t+\frac{b+a}{2}-a)(t+\frac{b+a}{2}-b)dt =$$

$$\int_{\frac{-(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} (t+\frac{b-a}{2})(t-\frac{b-a}{2})dt$$

$$m \le f''(x) \le M$$

נשים גם לב כי בקטע [a,b], (x-a)(x-b) היא שלילית ולכן

נקבל אי שויון:

$$\frac{M(x-a)(x-b)}{2} \le f(x)-p(x) \le \frac{m(x-a)(x-b)}{2}$$

נאנטגרל=(נסכום) בקטע. נשים לב כי כאשר x שיך לקטע [a,b],

אז המשתנה x-(a+b)/2 שיך לקטע [-(b-a)/2,(b-a)/2], ולכן שנוי

המשתנה t=x-(a+b)/2 יתן

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \int_{\frac{-(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} (t+\frac{b+a}{2}-a)(t+\frac{b+a}{2}-b)dt =$$

$$\int_{\frac{-(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} (t+\frac{b-a}{2})(t-\frac{b-a}{2})dt$$

נסמן c=(b-a)/2. נקבל

ולכן:

$$\frac{4m(b-a)^3}{8\cdot 3\cdot 2} \le \int_a^b (f(x)-p(x))dx \le \frac{4M(b-a)^3}{8\cdot 3\cdot 2}$$

$$\frac{m(b-a)^3}{12} \le \int_a^b (f(x)-p(x))dx \le \frac{M(b-a)^3}{12}$$

או

נביט על

$$\frac{12\int_a^b (f(x)-p(x))dx}{(b-a)^3}$$

$$I = \int_{-c}^{c}(t+c)(t-c)dt = \int_{-c}^{c}(t^2-c^2)dt =$$

$$2\int_0^c (t^2-c^2)dt = \frac{2t^3}{3} - 2c^2 t = \frac{2c^3}{3} - 2c^3 = -\frac{4c^3}{3}$$

בטוי זה חסום בין הערכים m ו- M, וגם הפונקציה הרציפה f’’

חסומה בין אותם ערכים. לכן יש ערך אחד לפחות d, בקטע,

כלומר כך ש- a≤d≤b, וכך שמתקים:

$$f''(d) = \frac{12\cdot\int_a^b (f(x)-p(x))dx}{(b-a)^3}$$

או על ידי העברת אגפים:

$$\int_a^b (f(x)-p(x))dx = \frac{f''(d)(b-a)^3}{12}$$

כעת נניח כי מחלקים את הקטע [a,b] לתת קטעים שוים באורך h,

ובכל קטע משתמשים בקרוב הקודם עם נקודת בינים d_i. נקבל

$$I = \int_a^b (f(x)-p(x))dx = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(d_i)h^3}{12}$$

נזכר כי h=(b-a)/n, ולכן נקבל:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(d_i)}{n} \cdot \frac{(b-a)h^2}{12}$$

נשתמש בנוסחה זו. ידוע כי כל אחד מהמחוברים חסום בין M ו- m,

ולכן גם הממוצע שלהם. כיון ש- f’’ רציפה, קימת נקודת בינים c

כך ש- a<c<b , וכך ש-

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f''(d_i)}{n} = f''(c)$$

נציב זאת ונקבל

$$\int_a^b (f(x) - p(x))dx = \frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}$$

וזוהי נוסחת הערכת השגיאה.

שיטת סימפסון

נביט בקטע [a,b], ונחשב את הפרבולה אשר עוברת בנקודות

(a,f(a)), (b,f(b)),((a+b)/2,f((a+b)/2)). נציב בדוגמה 5

ונקבל q=a, r=(a+b)/2, s=b

$$p(x) = \frac{1}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$

$$(r-s)f(q)(x^2-(r+s)x+rs)+$$

$$-(q-s)f(r)(x^2-(q+s)x+qs)+$$

$$(q-r)f(s)(x^2-(q+r)x+qr)$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}[f(a)(2x^2-(a+3b)x+(a+b)b)$$

$$-4f(\frac{a+b}{2})(x^2-(a+b)x+ab)+$$

$$f(b)(2x^2-(3a+b)x+(a+b)a)]$$

נבצע אינטגרציה מ- a עד b ונקבל.

$$שטח = \frac{1}{(a-b)^2}[f(a)(2\frac{b^3-a^3}{3}-(a+3b)\frac{b^2-a^2}{2}+(a+b)b(b-a))$$

$$-4f(\frac{a+b}{2})(\frac{b^3-a^3}{3}-(a+b)\frac{b^2-a^2}{2}+ab(b-a))+$$

$$f(b)(2\frac{b^3-a^3}{3}-(3a+b)\frac{b^2-a^2}{2}+(a+b)a(b-a))]=$$

$$\frac{f(a)}{6(a-b)^2}[4(b^3-a^3)-3(a+3b)(b^2-a^2)+6(a+b)b(b-a)]-$$

$$-\frac{4f(\frac{a+b}{2})}{6(a-b)^2}[2(b^3-a^3)-3(a+b)(b^2-a^2)+6ab(b-a)]+$$

$$\frac{f(a)}{6(a-b)^2}[4(b^3-a^3)-3(3a+b)(b^2-a^2)+6(a+b)b(b-a)]=$$

$$\frac{f(a)}{6(b-a)}[4(b^2+ab+a^2)-3(a+3b)(b+a)+6(a+b)b]-$$

$$-\frac{4f(\frac{a+b}{2})}{6(b-a)}[2(b^2+ab+a^2)-3(a+b)(b+a)+6ab]+$$

$$+\frac{f(a)}{6(b-a)}[4(b^2+ab+a^2)-3(3a+b)(b+a)+6(a+b)b]=$$

$$\frac{(b-a)^2}{6(b-a)}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]=\frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

ונקבל את נוסחת סימפסון:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

וכעת נחשב על השארית. קימת c_x כך ש-

$$f(x) = p(x) + \frac{f'''(c_x)(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{3!}$$

נבצע אינטגרציה של w(x)

$$I = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{6} dx$$

נבצע חלוף משתנים t=x-(a+b)/2 ונקבל:

$$I = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{t(t-\frac{b-a}{2})(t+\frac{b-a}{2})}{6} dt$$

ולכן נסמן c=(b-a)/2 ונקבל

ולכן נסמן c=(b-a)/2 ונקבל

$$0 = I = \int_{-c}^{c} \frac{t^3 - c^2 t}{6} dt \neq \frac{2}{6} \int_{0}^{c} (t^3 - c^2 t) dt$$

כיון שהאינטגרנד היא פונקציה אי זוגית.

ולכן דרך ההוכחה שעבדה עבור שיטת הטרפז לא עובדת.

ההוכחה הנכונה מתבססת על נוסחאות 7.21, 7.22, 2.12

ועל הסימטריה של ההפרש המחולק, המופיעים בספר

של Conte and de Boore. אנו נעתיק את החלק החסר של

ההוכחה.

לפי נוסחאות אלו, אם ∫w(x)dx=0 בקטע [a,b], אז במשפט

השארית של לגרנז אפשר לכתב

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x) w_1(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+2)}(d_x) w_2(x)}{(n+2)!}$$

כאשר $w_2(x)$ מתבססת על נקודה כלשהי נוספת בקטע.

מותר לנקודה הנוספת להיות זהה לנקודה שכבר הופיעה.

במקרה שלנו בתחילה p היתה הפרבולה המבוססת על

הנקודות $a,b,(a+b)/2$. כיון שהאינטגרל של w_1 יצא 0 ,

הרי שמותר ליצור את $w_2(x)=(x-a)(x-b)(x-(a+b)/2)(x-(a+b)/2)$.

יוצא כי פולינום האינטרפולציה זהה למקודם ומקבלים:

$$f(x)-p(x)=\frac{f''''(d_x)w_2(x)}{4!}$$

נניח כי f'''' רציפה בקטע ולכן חסומה בין שני חסמים m ו- M.

נשים לב כי w_2 שלילית בקטע ולכן:

$$\frac{Mw_2(x)}{4!}\le\frac{f''''(d_x)w_2(x)}{4!}\le\frac{mw_2(x)}{4!}$$

הבטוי האמצעי שוה ל- $f(x)-p(x)$, ונותר לחשב את האינטגרל

של w_2. נבצע את אותו שנוי משתנה כמקודם, $t=x-((a+b)/2)$,

נסמן $c=((b-a)/2)$, ולכן:

$$I = \int_a^b w_2(x)dx = \int_{-c}^{c} t^2(t-c)(t+c)dt =$$

$$= 2\int_0^c t^2(t-c)(t+c)dt = = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{c^2t^3}{3}\right)\Big|_0^c = \frac{-4c^5}{15}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\frac{m((b-a)/2)^5}{90} \le \int_a^b (f(x) - p(x))dx \le \frac{M((b-a)/2)^5}{90}$$

נביט על

$$\frac{90\int_a^b (f(x) - p(x))dx}{((b-a)/2)^5}$$

בטוי זה חסום בין m ו- M, ולכן יש c עבורו מתקים

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)) = \frac{f''''(c)((b-a/2))^5}{90}$$

כעת נחלק את הקטע [a,b] ל- n קטעים שוים באורך h=(b-a)/n.

על כל אחד נפעיל את הנוסחה הקודמת ונקבל:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}((f(a)+4f(a+\frac{h}{2})+f(a+h))+$$

$$(f(a+h)+4f(a+\frac{3h}{2})+f(a+2h))+\cdots+$$

$$(f(a+(n-1)h)+4f(a+\frac{(2n-1)h}{2})+f(b))$$

נסכם ונקבל את נוסחת סימפסון

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(a)+4f(a+\frac{h}{2})+$$

$$2f(a+h)+4f(a+\frac{3h}{2})+2f(a+2h)+$$

$$\cdots+2f(a+(n-1)h)+4f(a+\frac{(2n-1)h}{2})+f(b))$$

ונחשב את השגיאה:

$$\int_a^b (f(x))dx - S(f,a,b,n) = \frac{(h/2)^5}{90}\sum_{i=1}^{n} f''''(c_i)$$

נכתב $(h/2)^5=((h/2)^4\ (b-a))/2n$, ונציב זאת בנוסחת השגיאה. נזכר

כי ממוצע של ערכים חסומים בין m ו- M גם הוא חסום בין אותם

חסמים, ולכן לפי רציפות ''''f, קימת נקודה c, כך שמתקים

כי הממוצע שוה ל $f''''(c)$, ולכן:

$$\int_a^b (f(x))dx - S(f,a,b,n) = \frac{(h/2)^4(b-a)f''''(c)}{180}$$

וזוהי הערכת השגיאה בנוסחת סימפסון.

פרק 3 פתרון נומרי של משואות

נתונה משואה רבועית $ax^2+bx+c=0$ ומחפשים את פתרונותיה.

נחלק אותה ב- $a\neq 0$, ונקבל $x^2+(b/a)x+(c/a)=0$. אנו מחפשים

רבוע מהצורה $(x+d)^2$ שידמה ככל האפשר לבטוי בצד שמאל.

ואכן $(x+(b/2a))^2=x^2+(b/a)x+(b^2/4a^2)$ הוא הרבוע המתאים

ולכן נקבל , $(x+(b/2a))^2-(b^2/4a^2) +(c/a)=0$ ולכן

$(x+(b/2a))^2 =(b^2-4ac)/4a^2$ או $(x+(b/2a))=\pm\sqrt{}\ (b^2-4ac)/\ 4a^2$

ולכן מקבלים את הפתרון הרגיל.

נתונה משואה ממעלה שלישית $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ומחפשים את

פתרונותיה. נחלק אותה ב- $a\neq 0$, ונקבל

$x^3+(b/a)x^2+(c/a)x+(d/a)=0$. אנו

מחפשים בטוי מהצורה $(x+e)^3$ שידמה ככל האפשר לבטוי בצד

שמאל.

כעת נחזור למקרה הכללי, $p(x)=x^3+(b/a)x^2+(c/a)x+(d/a)=0$, ונשוה

אותו לבטוי $(x+(b/3a))^3=x^3+(b/a)x^2+(b^2/3a^2)x+(b^3/27a^3)$

לשני הבטויים יש אותם איברים מסדר שלש ושנים, ולכן נכתב:

$$p(x)=(x+(b/3a))^3- (b^2/3a^2)x - (b^3/27a^3) +(c/a)x +(d/a) =0$$

נכנס איברים מאותה חזקה

$$p(x)=(x+(b/3a))^3+((3ac-b^2)/3a^2)x+((27da^2-b^3)/27a^3)=0$$

נציב $z=x+b/3a$, ולכן $x=z-(b/3a)$ ונקבל

$z^3+((3ac-b^2)/3a^2)(z-(b/3a))+((27da^2-b^3)/27a^3)=0$

נפתח סוגרים ונקבל

$z^3+((3ac-b^2)/3a^2)\,z-((9abc-b^3-27\,da^2-9b^3)/27a^3)=0$

ולכן קבלנו משואה מהצורה $z^3+A\,z+B=0$

כאשר $A=((3ac-b^2)/3a^2),\ \ B=((-9a\,bc+27\,da^2+10b^3)/27a^3)$

והוכחנו את המשפט הבא:

נתון פולינום ממעלה n. קימת הצבה $z=x+a$ המשנה את הפולינום

כך שלא תהיה לו חזקת $n-1$.

נוסחת קרדן

נניח שנתונה המשואה $z^3-3p\,z-2q=0$. נביט בהצבה

$z=\sqrt{p}(u+(1/u))$, אז מתקים כי $z^3=\sqrt{p^3}\,(u^3+3u+(3/u)+(1/u^3))$

כלומר $z^3-3\sqrt{p^3}\,(u+(1/u))=\sqrt{p^3}\,(u^3+(1/u^3))$ ולכן

$z^3-3p\,z=\sqrt{p^3}\,(u^3+(1/u^3))=2q$ ולכן נקבל את המשואה

הבאה: $u^3+(1/u^3)=2q/\sqrt{p^3}$, או, $u^6-2q\,u^3/\sqrt{p^3}+1=0$. מכאן

אפשר למצא את u^3, ואח"כ את u, ואח"כ את z.

משפט

נתונה בעית השבת $g(x)=x$, נבחר x_0 באופן שרירותי, ונגדיר

באינדוקציה $x_{n+1}= g(x_n)$. נגדיר $e_n= x_n-s$. נגדיר $q_n = e_{n+1} /e_n$.

נניח כי g גזירה בקטע המכיל את נקודת השבת s ואת הנקודות

x_{n+1} ו- x_n. אז קימת נקודה אחת לפחות באותו קטע c_n כך ש

מתקים השויון $g'(c_n) = e_{n+1} /e_n$.

הוכחת המשפט

נסתמך על תכונת ערך הבינים של Lagrange. נקבל כי

$$e_{n+1}= x_{n+1}-s=g(x_n)-g(s)=g'(c_n)(x_n -s)= g'(c_n) e_n$$

ולכן נחלק ב- e_n ונקבל את הדרוש.

קשר עם שיטת ניוטון רפסון

נביט על שיטת ניוטון רפסון $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ונשים לב כי אם נגדיר $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

אז מתקים, $$x_{n+1} = g(x_n)$$ ולכן שיטת ניוטון רפסון

היא שיטת נקודת שבת עבור g זו, ולכן המשפט הקודם

תקף. אם נניח כי f גזירה פעמים, אז g גזירה ונגזרתה

$$1-\frac{f'^2-f''f}{f'^2}=1-1+\frac{f''f}{f'^2}=\frac{f''f}{f'^2}$$

היא   ולכן

אם נניח
כי s הוא שרש של f אך לא של f’, נובע כי

$$g'(s) = \frac{f''(s)f(s)}{f'(s)^2} = 0$$

ולכן שיטת ניוטון רפסון היא כזו שבה מנת ה- e שואפת ל- 0 .

שיטות מסדר שני

כל בעית שבת $x_{n+1}=g(x_n)$ שבה מתקים $g'(s)=0$ נקראת בעיה מסדר שני. שיטת ניוטון רפסון היא מסדר שני. ישנה דרך נוספת להעריך שיטה מסדר שני, תוך שמוש בנוסחת טיילור מסדר ראשון עם שארית לגרנז'. נפתח את הטור סביב נקודת השבת s.

$$g(x) = g(s) + g'(s)(x-s) + \frac{g''(c)(x-s)^2}{2}$$

נעביר איבר וכן נציב $x=x_n$. נקבל

$$g(x_n) - g(s) = g'(s)(x_n - s) + \frac{g''(c)(x_n-s)^2}{2}$$

נציב $g'(s)=0$,$x_n-s=e_n, g(x_n)=x_{n+1}, g(s)=s$ ונקבל:

$$x_{n+1}-s=\frac{g''(c)e_n^{\ 2}}{2}$$

נציב $x_{n+1}-s=e_{n+1}$ נעביר אגפים בחלוק ונקבל
:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2}=\frac{g''(c)}{2}$$

כלומר המנות $r_n=e_{n+1}/\ e_n^2$ אמורות לשאוף לבטוי

$g''(c\ )/2$.

מכללת נתניה- מבחן אנליזה נומרית- התשס"ב

מועד א – יום א יד שבט 27-1-2002 שעה 12:30

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט

מחשבונים. ענה על כמה שיותר שאלות.

משקל של כל סעיף בכל שאלה 5 נקודות, למעט שאלה 1

סעיף א שאלה 2 סעיף ה שמשקלן 6 נקודות, ושאלות 2 סעיף

ח, 3 סעיף ט ו- 4 סעיף ו שמשקלן 8 נקודות כל אחת.

חשובים והצבות $10523=5\times$, נסוחי משפטים $122=6\times$

הוכחות 243=8×. סה"כ 141 נקודות. ענה על שאלות 1 ו- 4
ועל שאלה 2 **או** שאלה 3.
ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. תורדנה

נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום

המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה

התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת

צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות

הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב.

האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על

הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך

ולהתלונן שבגלל התשובה שלי הוא כתב תשובה

שגויה. בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי

פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר
אם הפתוח מספיק.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ו**לא** תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

בהצלחה.