דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p = f(a_0)q_0(x) + \cdots + f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x) = \frac{(x - a_0)h(x) - (x - a_{n+1})g(x)}{(x - a_0) - (x - a_{n+1})}$$

$$h(a_i) = f(a_i), 1 \le i \le n + 1$$

$$g(a_i) = f(a_i), 0 \le i \le n$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c(x))(x - a_0)\cdot\cdots\cdot(x - a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן:

$$SR = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le \cdots x_n = b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז:

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}=\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי):

$$\frac{h}{3}(f(a)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(a+2kh+h)+f(b)),\ h=\frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון:

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180}=\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה:

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש- $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק):

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר:

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\rightarrow l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת: $|E_n| \le M^n(b-a)$,
$M = \sup g'(x),\ a \le x \le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1} - L| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2$$

כאשר $m=\inf f'$, $M=\sup f''$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$.

יום ד, יב שבט התשס"ג 15-1-2003 סמסטר א, מועד א.

מבחן באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 83 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 7 שאלות במשקל 16 נקודות כל אחת, ויש

לענות בו 5 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-5 תשובות, תבדקנה רק 5 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 16 נקודות, כולל שתי שאלות ואשר מביניהן יש לבחור אחת. כל שאלה במשקל 16 נקודות, והיא קשורה לחומר הנלמד בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית. אם נענו שתי השאלות, תבדק רק התשובה הראשונה.

שאלה, שלא נתנה לה תשובה נכונה בשאלון, ושנבחרה על ידי הנבחן, תזכה אותו במלא הנקודות.

בהצלחה.

חלק א

אינטגרציה נומרית:

1.נתונה הפונקציה $f={}_e(x^2)$ בקטע [a=0 ,b=1]. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-n=4 קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ב. $e(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$
ג. $e(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ד. $(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$

1.נתונה הפונקציה $f={}_e(x^2)$ בקטע [a=1,b=2]. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-n=4 קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $e(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ב. $(1+4e^{1/16}+2e^{1/4}+4e^{9/16}+e)/12$
ג. $e(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$
ד. $(1+4e^{9/16}+2e^{5/4}+4e^{33/16}+e^3)/12$

2.נתונה הפונקציה $f=x^2+x$ בקטע [a,b]. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ב. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ג. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$
ד. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$

2.נתונה הפונקציה $f=x^2-x$ בקטע [a,b]. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ב. $(b-a)((2n^2+1)(a^2+b^2)+2(n^2-1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$
ג. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab+3n^2(a+b))/6n^2$
ד. $(b-a)((2n^2-1)(a^2+b^2)+2(n^2+1)ab-3n^2(a+b))/6n^2$

3. נתונה הפונקציה $f=x^3-12x+5$ בקטע [a=0 ,b=3]. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 67501 ב. 216001 ג. 72001 ד. 22501

3. נתונה הפונקציה $f=x^3-27x+5$ בקטע [a=0 ,b=4]. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 72001 ב. 22501 ג. 67501 ד. 216001

פתרון של משוואות:

4. המשוואה $f(x)=x^3-4x^2-19x-14=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=16]$. נערכו 3 איטרציות. אז c_3 שוה ל-

א. 3 ב. 9 ג. 7 ד. 5

4. המשוואה $f(x)=x^3-2x^2-13x-10=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=16]$. נערכו 3 איטרציות. אז c_3 שוה ל-

א. 7 ב. 5 ג. 3 ד. 9

5. המשוואה $f(x)=(x^2-10x+32)/8=0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=2$. נערכו 2 איטרציות. אז x_3 שוה ל-

א. 6 ב. 10 ג. 2 ד. 16/3

5. המשוואה $f(x)=(x^2-14x+72)/12=0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=2$. נערכו 2 איטרציות. אז x_3 שוה ל-

א. 10 ב. 16/3 ג. 2 ד. 6

6. המשואה $f(x)= -1.25x^3+3.5x^2-x+2=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 2 איטרציות. אז x_2 שוה ל-

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4

6. המשואה $f(x)= (2/27)x^3-x+3=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 2 איטרציות. אז x_2 שוה ל-

א. 4 ב. 1 ג. 2 ד. 3

אינטרפולציה

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(3)=179, f(2)=57, f(1)=15, f(-1)=3, f(-2)=9$. הצג את הפולינום כ: $ax^4+ bx^3+ cx^2+dx+e$. אז $b=$

א. 2 ב. 3 ג. 4 ד. 5

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(3)=179, f(2)=57, f(1)=15, f(-1)=3, f(-2)=9$. הצג את הפולינום כ: $ax^4+ bx^3+ cx^2+dx+e$. אז $c=$

א. 4 ב. 2 ג. 3 ד. 5

חלק ב: שאלות יצירתיות.

בחר בשאלה 8 או 9

8. פתח נוסחה להערכת שגיאה של סכומי רימן מהאינטגרל האמיתי, כמו שנעשה בכתה, אלא , שנקודות הבינים הן בצד **ימין** של כל תת קטע: פתח את הנוסחה במחברתך. השתמש בה כדי להעריך את השגיאה של סכומי רימן, נקודות בינים בימין, של האינטגרל של הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע [$a=1$ $b=2$], עבור $n=5$. השגיאה היא:

א. 0.8   ב. 0.4   ג. 0.2   ד. 0.6

8. פתח נוסחה להערכת שגיאה של סכומי רימן מהאינטגרל האמיתי, כמו שנעשה בכתה, אלא , שנקודות הבינים הן בצד **ימין** של כל תת קטע: פתח את הנוסחה במחברתך. השתמש בה כדי להעריך את השגיאה של סכומי רימן, נקודות בינים בימין, של האינטגרל של הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע [$a=1$ $b=2$], עבור $n=10$. השגיאה היא:

א. 0.4   ב. 0.2   ג. 0.6   ד. 0.8

9. נתונה הנקודה $(a,f(a))$. חשב את משואת הפרבולה $y=g(x)$, אשר מקימת: $g(a)=f(a),\ g'(a)=f'(a),\ g''(a)=f''(a)$. נתונה $f(x)=x^3-1$, והנקודה $(a=1.5,f(a)=2.375)$ עליה. חשב את הפרבולה, ומצא את נקודות החתוך שלה עם ציר x . הנקודות הן:

א. $(27\pm3\sqrt{5})/36$ ב. $(27\pm5\sqrt{3})/36$ ג. $(27\pm6\sqrt{2})/36$ ד. $(27\pm4\sqrt{3})/36$

יום ו, כו אדר א התשס"ג 28-2-2003 סמסטר א, מועד ב.

מבחן באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 83 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 7 שאלות במשקל 16 נקודות כל אחת, ויש לענות בו 5 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-5 תשובות, תבדקנה רק 5 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 16 נקודות, כולל שתי שאלות ואשר מביניהן יש לבחור אחת. כל שאלה במשקל 16 נקודות, והיא קשורה לחומר הנלמד בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית. אם נענו שתי השאלות, תבדק רק התשובה הראשונה.

שאלה, שלא נתנה לה תשובה נכונה בשאלון, ושנבחרה על ידי הנבחן, תזכה אותו במלא הנקודות.

בהצלחה.

חלק א

אינטגרציה נומרית:

1. נתונה הפונקציה $f=e^{(x^2)}$ בקטע $[a=0,b=2]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-$n=4$ קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/6$
ב. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/12$
ג. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/3$
ד. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+e^4)/16$

2.נתונה הפונקציה $f=x^3$ בקטע $[a,b]$. קרב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((n^2+2)(a^3+b^3)+(n-1)(n+2)(a^2b+ab^2))/4n^2$
ב. $(b-a)((n^2+2)(a^3+b^3)+(n-2)(n+1)(a^2b+ab^2))/4n^2$
ג. $(b-a)((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-1)(n+1)(a^2b+ab^2))/4n^2$
ד. $(b-a)((n^2+1)(a^3+b^3)+(n-2)(n+2)(a^2b+ab^2))/4n^2$

3. נתונה הפונקציה $f=x^4-8x^3+18x^2+5x+6$ בקטע $[a=0, b=3.5]$. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 257251 ב. 128626 ג. 126826 ד. 253651

פתרון של משואות:

4. המשואה $f(x)=x^3-2x^2-x-1=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=32]$. נערכו 4 איטרציות. אז c_4 שוה ל-

א. 3 ב. 7 ג. 5 ד. 1

5. המשואה $f(x)=(-7x^3-37x^2-16x+150)/30=0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=-2$. נערכו 3 איטרציות. אז x_4 שוה ל-

א. 7- ב. 6 ג. 8 ד. 7

6. המשואה $f(x)= 4x^3-12 x^2-x+2=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 3 איטרציות. בטא כל תוצאה כשבר. אז x_3 שווה ל-

א. -25112/2768 ב. -24306/2687 ג. -23448/2882 ד. -26538/2348

אינטרפולציה

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(3)=115, f(2)=27,f(1)=3,f(-1)=3,f(-2)=15$. הצג את הפולינום כ: $ax^4+ bx^3+ cx^2+dx+e$. אז $d=$

א. 2 ב. 1 ג. -1 ד. -2

חלק ב: שאלות יצירתיות.

בחר בשאלה 8 או 9

8. פתח נוסחה להערכת שגיאה של סכומי רימן מהאינטגרל האמיתי, כמו שנעשה בכתה, אלא , שנקודות הבינים הן ב**אמצע** כל של תת קטע: פתח את הנוסחה במחברתך. הנוסחה היא $(f'(c)(b-a)^2)/kn$ כאשר $k=$

א. 8 ב. 4 ג. 2 ד. 6

תשובה:

9 . נתונה $f(x)=x^4-17$, והנקודה $(a=1,f(a)=-16)$ עליה. חשב את משואת הפרבולה $y=g(x)$, אשר מקימת: $g(a)=f(a)$, $g'(a)=f'(a)$, $g''(a)=f''(a)$. מצא את נקודות החתוך שלה עם ציר x. עבור כל נקודת חתוך כזו, העבר פרבולה מתאימה תוך שמוש באותה פונקציה, ולכל אחת נקודות חתוך עם ציר x. תקבל עד 4 נקודות ממשיות. הנקודות הן:

א. $7/3, -1, (49\pm\sqrt{325})/21$ ב. $7/3, -1, (98\pm\sqrt{865})/21$
ג. $-7/3, 1, (98\pm\sqrt{865})/21$ ד. $-7/3, 1, (49\pm\sqrt{325})/21$

יום ד, יט איר התשס"ג 21-5-2003 סמסטר א, מועד ג.

מבחן באנליזה נומרית. מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש להקיף את התשובה הנכונה. מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן יש שני חלקים:

חלק א, שבו אפשר לצבור עד 83 נקודות, כולל תרגילים אשר מאד דומים לתרגילים שנעשו בכתה. יש בו 7 שאלות במשקל 16 נקודות כל אחת, ויש לענות בו 5 תשובות נכונות. אם נענו יותר מ-5 תשובות, תבדקנה רק 5 הראשונות.

חלק ב, שבו אפשר לצבור עד 16 נקודות, כולל שתי שאלות ואשר מביניהן יש לבחור אחת. כל שאלה במשקל 16 נקודות, והיא קשורה לחומר הנלמד בשעור ובתרגול, אבל בצורה יצירתית. אם נענו שתי השאלות, תבדק רק התשובה הראשונה.

שאלה, שלא נתנה לה תשובה נכונה בשאלון, ושנבחרה על ידי הנבחן, תזכה אותו במלא הנקודות.

בהצלחה.

חלק א

אינטגרציה נומרית

1.נתונה הפונקציה $f=_e(x^2)$ בקטע $[a=0\ ,b=4]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת סימפסון ו-$n=8$ קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(1+4e+2e^4+4e^9+e^{16})/12$

ב. $(1+4e+2e^4+4e^9+e^{16})/6$

ג. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+2e^4+4e^{25/4}+2e^9+4e^{49/4}+e^{16})/12$

ד. $(1+4e^{1/4}+2e+4e^{9/4}+2e^4+4e^{25/4}+2e^9+4e^{49/4}+e^{16})/6$

2.נתונה הפונקציה $f=x^3+x$ בקטע $[a,b\ ]$. חשב את האינטגרל שלה ע"ס שיטת הטרפז ו-n קטעים שוים. אז הסכום יוצא

א. $(b-a)((n^2(a^3+b^3+a^2b+ab^2+2a+2b)+a^3+b^3-a^2b-ab^2)/4n^2$

ב. $(b-a)((n^2(a^3+b^3-a^2b-ab^2+2a+2b)+a^3+b^3-a^2b-ab^2)/4n^2$

ג. $(b-a)((n^2(a^3+b^3+a^2b+ab^2+2a+2b)+a^3+b^3+a^2b+ab^2)/4n^2$

ד. $(b-a)((n^2(a^3+b^3-a^2b-ab^2+2a+2b)+a^3+b^3+a^2b+ab^2)/4n^2$

3.נתונה $f=x[_e(-2x^2)]$ (x כפול ב- $_e(-2x^2)$) בקטע $[a=0\ ,b=2]$. אנשים חשבו את האינטגרל שלה ע"ס סכומי רימן ו-n קטעים שוים (נקודות בינים בשמאל). הערך את השגיאה. ה-n הראשון שיבטיח כי ערך מוחלט של השגיאה קטן מ-1/1000 הוא:

א. 1786 ב. 2001 ג. 3 ד. 22501

פתרון של משואות:

4. המשואה $f(x)=x^3-2x^2-x-14=0$ נפתרה על ידי שיטת החציה כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $[a_0=0,b_0=16]$. נערכו 3 איטרציות. אז c_3 שוה ל-

א. 3 ב. 1 ג. 7 ד. 5

5. המשואה $f(x)=(x^2-5x+8)/2 = 0$ נפתרה על ידי שיטת המיתר כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0,x_1=3$. נערכו 2 איטרציות. אז x_3 שוה ל-

א. 6 ב. 10 ג. 2 ד. 16/3

6. המשואה $f(x)= 5x^3-7x^2+x-1=0$ נפתרה על ידי שיטת ניוטון-רפסון כאשר הנחוש ההתחלתי הוא $x_0=0$, . נערכו 2 איטרציות. אז x_2 שוה ל-

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4

אינטרפולציה

7. חשב בכל דרך שהיא את פולינום האינטרפולציה של הנתונים הבאים: $f(-2)=31,\ f(-1)=5,f(0)=1,f(1)=1,f(2)=11$. הצג את הפולינום כ: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. אז $c=$

א. 4 ב. 2 ג. 3 ד. 1

חלק ב: שאלות יצירתיות.

בחר בשאלה 8 או 9

8. הזכר במחברתך בהוכחת משפט הקיום והיחידות של פולינום האינטרפולציה שנעשתה בכתה, וענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה במעגל. (המחברת לא תבדק).

א. בהוכחת המשפט משתמשים בצורת פולינום לגרנז: נכון/לא נכון.
ב. בהוכחת המשפט משתמשים במשפט ערך הבינים של לגרנז: נכון/לא נכון.
ג. בהוכחת המשפט משתמשים בדטרמיננט ון דר מונדה: נכון/לא נכון.

9. הזכר במחברתך בהוכחת משפט הערכת השגיאה של פולינום האינטרפולציה שנעשתה בכתה, וענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה במעגל. (המחברת לא תבדק).

א. בהוכחת המשפט משתמשים בצורת פולינום לגרנז: נכון/לא נכון.
ב. בהוכחת המשפט משתמשים במשפט ערך הבינים של לגרנז: נכון/לא נכון.
ג. בהוכחת המשפט משתמשים בדטרמיננט ון דר מונדה: נכון/לא נכון.

יום ו, ה טבת התשס"ה 17-12-2004 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן הציון המקסימלי הוא 80 .

במבחן 3 שאלות. שאלה 1 בת 9 סעיפים, 2 בת 13 סעיפים ו-3 בת 16 סעיפים.

שאלה 1 סעיף 9 שוה 6 נקודות.

כל סעיף אחר שוה 2 נקודות, סה"כ $2x37=74$, $74+6=80$.

בהצלחה.

טור-- א

1 . הבט בפונקציה $f(x)=e^{(x^2)}$.

א. חשב את $f(0)$. תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$. תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$. תשובה:
ד. חשב את $f'''(0)$. תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$. תשובה:

ו. חשב את $f^{(5)}(0)$. תשובה:

ז. חשב את $f^{(6)}(0)$. תשובה:

ח. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 6 כולל.

תשובה:

ט. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

טור-- ב

1 . הבט בפונקציה $f(x)=e^{-(x^2)}$.

א. חשב את $f(0)$. תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$. תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$. תשובה:

ד. חשב את $f'''(0)$. תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$. תשובה:

ו. חשב את $f^{(5)}(0)$. תשובה:

ז. חשב את $f^{(6)}(0)$. תשובה:

ח. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 6 כולל.

תשובה:

ט. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

טור א

2. הבט בפונקציה

$$f=\sqrt[3]{x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(1)=1,f(8)=2$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[1,8]$.

תשובה: $|f-p|\le$.

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:

$|f-p|\le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע.

תשובה:

$|f-p|\le$

ח. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

ט. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=1<a_1<a_2<,\ldots,<a_n=8$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f-p_n|\leq$

י. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f-p_n|\leq$

יא. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f-p_n|\leq$

יב. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\ldots,a_n=8$ משתנה לנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\ldots,a_n=1.728$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f-p_n|\leq$

יג. מצא N כך ש-עבור n>N מתקים כי $|f-p_n|\leq 0.001$

טור ב

2. הבט בפונקציה

$$f=\sqrt[3]{x^2}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(1)=1, f(8)=4$. וסמן אותו p .

תשובה: p=

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: a=

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע [1,8].

תשובה: $|f-p| \leq$.

ד. חשב את f'' . תשובה: f''=
.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי c(x)).

תשובה:
$|f-p| \leq$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: a= .

ז. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע.

תשובה:
$|f-p| \leq$

ח. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

ט. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=1<a_1<a_2<,\dots, <a_n=8$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי c(x)). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f-$
$p_n| \leq$

י. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f-$
$p_n| \leq$

יא. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f-$
$p_n| \leq$

יב. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\dots, a_n=8$ משתנה לנתון $a_0=1,a_1=,a_2=,\dots, a_n=1.728$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f-$
$p_n| \leq$

יג. מצא N כך ש-עבור $n>N$ מתקיים כי $|f-p_n|\leq 0.001$

שאלה 3 טור א

הבט בפונקציה $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ על הקטע $[1,2]$

א. חשב את האינטגרל של f בקטע.

תשובה:

ב. חשב את סכום רימן של אותו אינטגרל בהנחה כי הקטע חולק ל-n קטעים שוים.

תשובה:

ג. עבור התשובה בסעיף הקודם, מצא את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. מצא N כך עבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה בפועל קטנה מ-0.001 .

תשובה:

ה. חשב את הערכת השגיאה לפי נוסחת השארית:

תשובה:

ו. מצא N כך עבור $n>N$ מתקיים כי הערכת השגיאה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

ז. חשב קרוב לאינטגרל בהנחה כי הקטע חולק ל-n קטעים שוים, ובכל אחד השתמשנו בטרפז.

תשובה:

ח. עבור התשובה בסעיף הקודם, מצא את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ט. מצא N כך עבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה בפועל קטנה מ-0.001 .

תשובה:

י. חשב את הערכת השגיאה לפי נוסחת השארית:

תשובה:

יא. מצא N כך עבור $n>N$ מתקיים כי הערכת השגיאה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

שים לב כי עתה f **שונתה** להיות $f(x)=4x^3$ על אותו קטע.

יב. חשב קרוב לאינטגרל בהנחה כי הקטע חולק ל-2n קטעים שוים, ובכל זוג השתמשנו בפרבולה (שיטת סימפסון).

תשובה:

יג. עבור התשובה בסעיף הקודם, מצא את השגיאה האמיתית.

תשובה:

יד. מצא N כך עבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה בפועל קטנה מ-0.001 .

תשובה:

טו. חשב את הערכת השגיאה לפי נוסחת השארית:

תשובה:

טז. מצא N כך עבור $n>N$ מתקיים כי הערכת השגיאה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

יום ו, יט טבת התשס"ה 31-12-2004 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 3 שאלות. שאלה 1 בת 7 סעיפים, 2 בת 16 סעיפים ו-3 בת 11 סעיפים. סה"כ 34 סעיפים.

כל סעיף אחר שוה 3 נקודות, סה"כ $3x34=102$.

בהצלחה.

1 . הבט בפונקציה $f(x)=x\sin(x)$.

א. חשב את $f(0)$. תשובה:

ב. חשב את $f'(0)$. תשובה:

ג. חשב את $f''(0)$. תשובה:

ד. חשב את $f'''(0)$. תשובה:

ה. חשב את $f^{(4)}(0)$. תשובה:

ו. כתוב את פתוח מקלורן של f עד סדר 4 כולל.

תשובה:

ז. על סמך נחוש כתוב את פתוח מקלורן הכולל של f .

תשובה:

2. הבט בפונקציה

$$f=\sqrt{x^3}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(1)=1,f(4)=8$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. הצב את הנקודה a שמצאת בסעיף הקודם ב- f-p .

תשובה: $(f-p)(a)=$.

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$
.

השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך במחברת את $|f-p|$. בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

ה. מצא קבוע אשר חוסם את $f^{(2)}c(x)$.

תשובה: $|f^{(2)}c(x)| \le$

ו. חקור את הפונקציה $(x-a_0)(x-a_1)$ אשר נמצאת בנוסחת השארית, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה:
$a=$.

ז. הצב את a אשר מצאת בסעיף הקודם בבטוי $(x-a_0)(x-a_1)$

תשובה: $|(a-a_0)(a-a_1$
$)|=$

ח. השתמש בתשובות של סעיפים ה, ז כדי להעריך את $|f-p|$

תשובה:
$|f-p|\le$

נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=1<a_1<a_2<,\dots, <a_n=4$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש במחברתך בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$. בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

ט. כתוב את הנגזרת ה-n-ית של f עבור $2\le n$.

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. חסום את $f^{(n+1)}=$ בקטע [1,4] על ידי פונקציה של n .

תשובה:
$|f^{(n+1)}| \le$

יא. חסום את $(x-a_0)\ldots(x-a_n)$ על ידי פונקציה של n .

תשובה: $|(x-a_0)\ldots(x-a_n)| \le$

יב . הצב את התשובות של סעיפים י-יא בנוסחת השארית של לגרנז.

תשובה: $|f- p_n| \le$

יג. פשט את החסם שמצאת בנוסחה יב כך שיהיה פחות תלוי ב- n .

תשובה: $|f-$
$p_n| \le$

יד. מהו הגבול של הבטוי שמצאת בסעיף יג, כאשר n שואף ל-∞?

תשובה:

בסעיפים הבאים אנו עוברים לבעיה אשר זהה לבעיה המוצגת בין סעיפים ח-ט, חוץ מהעובדה כי הבטוי $a_0=1<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=4$ מוחלף בבטוי $a_0=1<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=1.96$: השתמש במחברתך בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$. בסעיפים הבאים תשאל אודות החשבונות שעשית.

טו. הבטוי המתאים ל-יג עבור הבעיה החדשה הוא:

תשובה: $|f-p_n| \le$

טז. על סמך סעיף טו, מצא N כך לכל n<N מתקיים $|f-p_n| \le 0.001$

תשובה:
N=

תשובה לשאלה 2

שאלה 3

הבט בפונקציה $f(x)=\sin(x)/x$ על הקטע [1,2]

בשלשת הסעיפים הבאים הנך מתבקש לחשב קרובים של האינטגרל. בכל התשובות, הבט על מספרים כמו $\sin(5)/5$ כעל תשובה מלאה-אין צורך לפתח אותם יותר.

א. חשב את סכום רימן המבוסס על 5 קטעים שוים, נקודת בינים בשמאל.

תשובה:

ב. חשב את סכום הטרפז המבוסס על 5 קטעים שוים.

תשובה:

ג. חשב את סכום סימפסון המבוסס על m=4 קטעים שוים גדולים, n=8 חצאי קטעים.

תשובה:

בסעיפים הבאים ד-יא תתבקש לחשב לחשב סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים של x^3 על הקטע [1,5] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n אבל לא יכיל סיגמא.

ד. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ח. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ט. מצא N כך שעבור n>N מתקים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

י. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

יא. מצא N כך שעבור n>N מתקים כי השגיאה שבסעיף י קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

יום ו, ב אדר א התשס"ה 11-2-2005 מבחן מועד א באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 2 חלקים. בחלק הראשון 5 שאלות בנות 39 סעיפים ביחד. כל סעיף שוה 2 נקודות וסה"כ 78 נקודות. בחלק השני 3 שאלות בנות 7 נקודות כ"א, וסה"כ 21 נקודות. הציון המקסימלי במבחן הוא 99 .

בהצלחה.

טור א

---

1. הבט בפונקציה $f(x)=x^2-4$ בקטע $[a0=-1,b0=15]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. $b1=$, $a1=$

ב. $b2=$, $a2=$

ג. $b3=$, $a3=$

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את $en=bn-p$ כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. $e0=$,$e1=$,$e2=$,$e3=$

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

$e1/e0=$, $e2/e1=$, $e3/e2=$

תשובה לטור א

א. $a1= -1$, $b1= 7$

ב. $a2= -1$, $b2= 3$

ג. $a3= 1$, $b3= 3$

ד. $e0=13$,$e1=5$,$e2=1$,$e3=1$

ה. $e1/e0=0.384$ $e2/e1=0.2$, $e3/e2=1$

טור ב

---

1. הבט בפונקציה $f(x)=x^2-9$ בקטע $[a0=-2,b0=14]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. $a1=$, $b1=$

ב. $a2=$, $b2=$

ג. $a3=$, $b3=$

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את en=bn-p כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. $e3=$, $e2=$, $e1=$, $e0=$

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

$e3/e2=$, $e2/e1=$, $e1/e0=$

תשובה לטור ב

א. $b1= 6$, $a1= -2$

ב. $b2= 6$, $a2= 2$

ג. $b3= 4$, $a3= 2$

ד. $e3=1$, $e2=3$, $e1=3$, $e0=11$

ה. $e3/e2=0.333$, $e2/e1=1$ $e1/e0=0.2727$

2. טור א

הבט על x^2-9 ו $x0=14$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x1=$

ב. $x2=$

ג. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$, $e_3=$

ה. חשב את e_{n+1}/e_n $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $e_{n+1}/(e_n)^2$
$e_1/(e_0)^2=$, $e_2/(e_1)^2=$, $e_3/(e_2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?
תשובה:

2. טור ב

הבט על x^2-4 ו $x_0=15$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x_1=$

ב. $x_2=$

ג. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$, $e_3=$

ה. חשב את e_{n+1}/e_n $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $e_{n+1}/(e_n)^2$

$e_1/(e_0)^2=$, $e_2/(e_1)^2=$, $e_3/(e_2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?
תשובה:

3. טור א

הבט ב- $f(x)=x^3-9x^2+26x-24=(x-2)(x-3)(x-4)$.

א. הבט במשוואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הביטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשוואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x_0 קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x_0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב $x_0=1$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$.

ה. $x_1=$

ו. $x_2=$

ז. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e3=$ $e2=$, $e1=$, $e0=$

ט. חשב את $en+1/en$ $e3/e2=$, $e2/e1=$, $e1/e0=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

3. טור ב

הבט ב- $f(x)=x^3-12x^2+44x-48=(x-2)(x-4)(x-6)$.

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של $x0$ קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו $x0$ קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב $x0=1$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $xn+1=g(xn)$.

ה. $x1=$

ו. $x2=$

ז. $x3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$ $e_3=$

ט. חשב את e_{n+1}/e_n , $e_3/e_2=$, $e_2/e_1=$ $e_1/e_0=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

שאלה 4

בשאלה זו תתבקש לחשב לחשב סכום טרפזים המבוסס על n קטעים שוים של x^3 על הקטע [1,5] בצע את החשוב במחברתך. סכום הטרפזים נתן לבטוי על ידי 6 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה.   תת הסכום החמישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו.   תת הסכום הששי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום הטרפזים.

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

ט. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום טרפזים, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

י. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ט קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

תשובה לשאלה 4

שאלה 5 טור א.

נתונה המשואה $x^3-9x^2+24x-15=0$.

א. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הביטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

ד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

ה. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

ו. מצא קרוב לשרש. תשובה:

שאלה 5 טור ב.

נתונה המשואה $x^3-12x^2+42x-25=0$.

א. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הביטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

ד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

ה. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

ו. מצא קרוב לשרש. תשובה:

חלק ב

בחלק זה השאלות לא חיבות להיות דומות לאף שאלה שהכרנו, אם כי הן קשורות כמובן לחומר שלמדנו.

שאלה 6

מהו c כך שבשאלה 4 יהיה שויון בנוסחה $E(ST)=f''(c)(b-a)^3/12n^2$?

שאלה 7

נניח כי נתונות 4 מספרים $a0<a1<a2<a3$ וכי אנו מחשבים את פולינום האינטרפולציה העובר דרך $(a0,f(a0)),(a1,f(a1)),(a2,f(a2)),(a3,f(a3))$.

מה מספר פעולות הכפל+מספר פעולות החלוק (נא להתעלם ממספר פעולות החבור והחסור) שיש לבצע בדרכים הבאות? הנח כי כל חשוב הוא כללי ביותר.

א. פתרון מקדמי הפולינום על ידי מערכת משואות לינארית, שאותה פותרים לפי שיטת קרמר. תשובה:

ב. נוסחת לגרנז.

שאלה 8

נתונה הפונקציה $y=x^3$.

א. חשב את פולינום מקלורן עד סדר 2 שלה. נסמן אותו $p(x)$

ב. חשב את פולינום האינטרפולציה מסדר 2 שלה המזדהה עם הפונקציה בנקודות $a=0,b=1/n,c=2/n$. נסמן אותו $q(x)$.

ג. ה-n הקטן ביותר כך שמתקים $|p_n(0)-q_n(0)|<0.001$ הוא:

ד. ה-n הקטן ביותר כך שמתקים $|p_n(1)-q_n(1)|<0.001$ הוא:

תשובה

יום ה, כ אדר ב התשס"ה 31-3-2005 מבחן מועד ב באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן 2 חלקים. בחלק הראשון 5 שאלות בנות 37 סעיפים ביחד. כל סעיף שוה 2 נקודות וסה"כ 74 נקודות. בחלק השני 3 שאלות בנות 9 נקודות כ"א, וסה"כ 27 נקודות. הציון המקסימלי במבחן הוא 101 .

בהצלחה.

1. הבט בפונקציה $f(x)=x^2-9$ בקטע $[a0=0,b0=16]$. השתמש בשיטת החציה וחשב שלשה שלבים במחברתך: ענה על השאלות הבאות:

א. $b1=$, $a1=$

ב. $b_2=$, $a_2=$

ג. $b_3=$, $a_3=$

עבור הסעיפים הבאים חשב במחברתך את $e_n=b_n-p$ כאשר p הוא גבול הסדרה הקודמת.

ד. $e_3=$, $e_2=$, $e_1=$, $e_0=$

ה. חשב את המנות הבאות במחברתך וכתוב את התשובה בשאלון:

$e_3/e_2=$, $e_2/e_1=$, $e_1/e_0=$,

תשובה

.2

הבט על x^2-16 ו $x_0=1$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x_1=$

ב. $x_2=$

ג. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_3=$, $e_2=$, $e_1=$, $e_0=$

ה. חשב את e_{n+1}/e_n $e_3/e_2=$, $e_2/e_1=$, $e_1/e_0=$

ו. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $e_{n+1}/(e_n)^2$

$e_1/(e_0)^2=$, $e_2/(e_1)^2=$, $e_3/(e_2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת?

תשובה:

תשובה

.3

הבט ב- $f(x)=x^3-9x^2+23x-15=(x-1)(x-3)(x-5)$.

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x_0 קרוב מספיק תתן סדרה התמכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x_0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודה? הנקודות הללו הן (אם אין כאלו נקודות רשום אין):

הצב $x_0=10$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$.

ה. $x_1=$

ו. $x_2=$

ז. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e_3=$ $e_2=$, $e_1=$, $e_0=$

ט. חשב את e_{n+1}/e_n $e_3/e_2=$, $e_2/e_1=$, $e_1/e_0=$

י. לאיזה ערך הסדרה הקודמת מתכנסת? תשובה:

תשובה:

שאלה 4

בשאלה זו תתבקש לחשב לחשב סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים של x^2+2x על הקטע $[1,4]$ בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי 5 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ז. מצא N כך שעבור n>N מתקיים כי השגיאה שבסעיף ו קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

ח. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

ט. מצא N כך שעבור n>N מתקיים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

תשובה לשאלה 4

שאלה 5

נתונה המשואה $x^3-15x^2+60x-10=0$.

א. מצא תחום שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

ד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

ה. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

תשובה לשאלה 5

חלק ב

בחלק זה השאלות לא חיבות להיות דומות לאף שאלה שהכרנו, אם כי הן קשורות כמובן לחומר שלמדנו.

שאלה 6

שאלה זו תורגלה בשעור התרגיל בלבד.

נתונה המשואה $x^5+7x^3-20=0$ ורוצים למצוא לה שרש בשיטת ניוטון רפסון. למדת בתרגול משפט המבטיח התכנסות.

א. מצא תחום שיקים את תנאי המשפט.

תשובה:

ב. מצא n טבעי שעבורו השגיאה $|x_n-d|$ תקטן מ-0.001, כאשר d הוא הגבול של הסדרה .ו-$x_0=b$.

ג. חשב את d עד דיוק של אלפית.

תשובה:

תשובה לשאלה 6.

שאלה 7

מהו מספר הפעמים שמשתמשים במשפט רול, בהוכחת נוסחת השארית של פולינום האינטרפולציה?

לפונקציה המסובכת יש $n+2$ נקודות התאפסות שונות, שאותן נסדר ב-$n+1$ זוגות, ועל כל זוג נפעיל את משפט רול, כלומר $n+1$ פעמים. בשלב הבא n פעמים, וכל נגזרת פעם פחות, עד שנקבל מספר פעמים שהוא סכום של סדרה חשבונית, אשר האבר הראשון בה הוא 1 והאחרון הוא $n+1$ ולכן נקבל $(n+1)n/2$ פעמים.

שאלה 8

נניח כי f,g הן פונקציות בעלות קדומות אלמנטריות G,F (כלומר $F'=f,G'=g$). האם להרכבה של g על f יש קדומה אלמנטרית?

תשובה: לאו דוקא. הקדומה של $f=x^2$ היא הפונקציה האלמנטרית $F=x^3/3$, הקדומה של $g=e^x$ הינה עצמה $G=g$ שהיא פונקציה אלמנטרית, אבל ההרכבה היא פונקציה חסרת קדומה אלמנטרית.

יום ה, כח כסלו התשס"ו 29-12-2005 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתיים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן הציון המקסימלי הוא 108 .

במבחן 4 שאלות.

שאלה 1 בת 14 סעיפים, 2 בת 8 סעיפים

כל סעיף שוה 22 נקודות סה"כ 88 נקודות..

שאלה 3 ושאלה 4 שוות 10 נקודות כל אחת .

בהצלחה.

שאלה 1

טור א

הבט בפונקציה

$$f = \sqrt{x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל   מ: f(4)=2,f(16)=4 . וסמן אותו p .

תשובה: p=

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[4,16]$.

תשובה: $|f-p|\le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$
.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:
$|f-p|\le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p|\le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:
$|f\text{-}p| \leq$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=4<a_1<a_2<,\dots, <a_n=16$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f\text{-} p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f\text{-}$
$p_n| \leq$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f\text{-} p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f\text{-}$
$p_n| \leq$

יב. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f\text{-}$
$p_n| \leq$

יג. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=4,a_1=,a_2=,\dots, a_n=12$ משתנה לנתון $a_0=4,a_1=,a_2=,\dots, a_n=5.76$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f\text{-}$
$p_n| \leq$

יד. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n| \le 0.001$

תשובה לשאלה 1 טור א

שאלה 1

טור ב

הבט בפונקציה

$$f = \sqrt{x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(9)=3, f(25)=5$. וסמן אותו p .

תשובה: p=

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: a=

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע [9,25].

תשובה: $|f-p| \le$.

הערכת |f-p| בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את |f-p| כפונקציה של x בלבד (בלי c(x)).

תשובה:

$|f-p|\le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p|\le$

הערכת |f-p| בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את |f-p| על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:

$|f-p|\le$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:

$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=9<a_1<a_2<,\dots,<a_n=25$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי c(x)). על n להופיע בבטוי 3 פעמים.

תשובה: $|f-p_n|\le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי 4 פעמים.

תשובה: $|f-p_n|\le$

יב. פשט את החסם שמצאת בסעיף י, על ידי אי שויון, כך שיכיל את n בשני מקומות בדיוק.

תשובה: $|f-p_n|\le$

יג. נניח כי בסעיף ט הנתון $a_0=9,a_1=,a_2=,\ldots, a_n=25$ משתנה לנתון $a_0=9,a_1=,a_2=,\ldots, a_n=10.24$. כתוב את התשובה של סעיף יא תחת ההנחות החדשות:

תשובה: $|f-p_n|\le$

יד. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n|\le 0.001$

תשובה לשאלה 1 טור ב

שאלה 2 טור א

חשב את סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים ונקודת בינים בשמאל של $4x^3$ על הקטע [1,3] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n ולא יכיל את סימן הסיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ו. מצא N כך שעבור n>N מתקים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

ז. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור n>N מתקים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ-0.001
. N=

תשובה:

שאלה 2 טור ב

חשב את סכום רימן המבוסס על n קטעים שוים ונקודת בינים בשמאל של $4x^3$ על הקטע [2,4] בצע את החשוב במחברתך. סכום רימן נתן לבטוי על ידי ארבעה תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n ולא יכיל את סימן הסיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה:

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום רימן.

תשובה:

ו. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקים כי השגיאה שבסעיף ה קטנה מ-0.001 .

תשובה:

N=

ז. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום רימן, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

ח. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף ז קטנה מ-0.001
.   N=

תשובה:

שאלה 3
עבור שאלה 2, מצא את c כך שאם נציב אותו בסעיף ז, נקבל שויון (ולא אי שויון) בהערכת השגיאה:

שאלה 4

נתונות נקודות $a1<a2<b1<b2<....<bn<c$ על ציר x וקימת פונקציה f אשר ערכי y שלה באותן נקודות ידועים. נתונות בנוסף שתי פונקציות g,h בעלות התכונות:

$g(a1)=f(a1),\ g(a2)=f(a2),\ g(b1)=f(b1),\ ....,\ g(bn)=f(bn).$
$h(b1)=f(b1),\ ....,\ h(bn)=f(bn), h(c)=f(c).$

בנה בעזרת g,h פונקציה p בעלת התכונות:

$p(a1)=f(a1),\ p(a2)=f(a2),\ p(b1)=f(b1),\ ....,\ p(bn)=f(bn), p(c)=f(c).$

והוכח שאכן יש לה תכונה זו.

מבחן מועד א באנליזה נומרית
יום א, ז שבט התשס"ו 5-2-2006

- מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.
- מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן 3 שאלות בנות 44 סעיפים ביחד. ישנם שני סעיפים בעלי משקל 8 נקודות: הסעיף האחרון של שאלה 2 והסעיף האחרון של שאלה 3. כל סעיף אחר שוה 2 נקודות וסה"כ 84 נקודות. יחד עם הסעיפים המיוחדים, הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .

בהצלחה.

<u>שאלה 1. (26 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת בשיטת ניוטון רפסון והיא בת שני חלקים.

<u>חלק ראשון- 16 נקודות</u>

הבט על $f(x)=\ln(x)$ ו $x_0=1.4$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x_1=$

ב. x_2

ג. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$, $e_3=$

ה. חשב את $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה e_{n+1}/e_n מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $e_1/(e_0)^2=$, $e_2/(e_1)^2=$, $e_3/(e_2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/(e_n)^2$ מתכנסת?

תשובה:

<u>חלק שני-10 נקודות</u>

נתונה המשואה $x^3-9x^2+26x-25=0$.

ט. מצא קטע שבו למשואה יש שרש p. תשובה:

הצב את הקצה השמאלי של הקטע של סעיף ט בתור x_0 , והשתמש בשיטת ניוטון רפסון לחשובים הבאים:

י. חשב את x_1: תשובה

יא. חשב את x_2: תשובה

יב. חשב את x_3: תשובה

יג. הערך את מרחק x_3 מהשורש p שעליו דברנו בסעיף ט. תשובה

<u>שאלה 2(38 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת בשיטת נקודות שבת כללית והיא בת שלשה סעיפים.

<u>חלק ראשון-20 נקודות</u>

הבט ב- $f(x)=x^3-10x^2-x+10=(x-1)(x+1)(x-10)$.

א. הבט במשואה $f(x)=0$ השאר את x^3 בצד אחד, העבר את שאר הבטויים ומצא $g(x)$ כך שהמשואה $f(x)=0$ שקולה לנקודת שבת של g .

תשובה: $g(x)=$

ב. רשום את נקודות השבת של g . הנקודות הן:

ג. עבור מי מנקודות השבת, בחירה של x_0 קרוב מספיק תתן סדרה המתכנסת לנקודת השבת? נקודות השבת הללו הן (אם אין כאלו נקודות שבת רשום אין):

ד. עבור מי מנקודות השבת. אפילו x_0 קרוב לא יתן סדרה מתכנסת לנקודת השבת? נקודות השבת הללו הן (אם אין כאלו נקודות שבת רשום אין):

הצב $x_0=11$ וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$.

ה. $x_1=$

ו. $x_2=$

ז. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ח. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$ $e_3=$

ט. חשב את $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

י. לאיזה ערך הסדרה e_{n+1}/e_n מתכנסת? תשובה:

תשובות:

<u>חלק שני-10 נקודות</u>

נתונה המשוואה $x^3-6x^2+11x-7=0$.

יא. מצא תחום שבו למשוואה יש שרש. תשובה:

יב. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשוואה. תשובה:

יג. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ב תהיה נקודת שבת. תשובה:

יד. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

טו. מצא n כך שהשגיאה שמצאת תהיה קטנה מ-0.01 . תשובה:

<u>חלק שלישי- 8 נקודות</u>

טז.נניח כי L היא נקודת שבת של $g(x)$ ונניח כי בחרנו על ידי נחוש x_0 כלשהו כך שמתקים $|g'(x_0)|>1$. נביט בסדרה המוגדרת בצורה איטרטיבית $x_{n+1}=g(x_n)$. מי מהאפשרויות הבאות נכונה? הקף את התשובה הנכונה.

טז-1- הסדרה תמיד מתכנסת ל-L.

טז-2- הסדרה לפעמים מתכנסת ל-L ולפעמים לא.

טז-3-הסדרה אף פעם לא מתכנסת ל-L.

<u>שאלה 3 (36 נקודות)</u>

שאלה זו עוסקת באינטגרציה נומרית ובה שני חלקים:

<u>חלק ראשון - 28 נקודות</u>

חשב את סכום סימפסון המבוסס על m קטעים שוים (n חצאי קטעים) של x^3 על הקטע [-2,2] בצע את החשוב במחברתך. הסכום נתן לבטוי על ידי 10 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של m או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של m הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של m הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ו. תת הסכום הששי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ז. תת הסכום השביעי כפונקציה של m הוא

תשובה:

ח. תת הסכום השמיני כפונקציה של m הוא

תשובה:

ט.   תת הסכום התשיעי כפונקציה של m הוא
תשובה:

י.   תת הסכום העשירי כפונקציה של m הוא

תשובה:

יא. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום סימפסון.

תשובה:

יב. מצא N כך שעבור m>N מתקים כי השגיאה שבסעיף יא קטנה מ- 0.001 .

תשובה:
N=

יג. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום סימפסון, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של m .

תשובה:

יד. מצא N כך שעבור m>N מתקים כי השגיאה שבסעיף יג קטנה מ-0.001 .

תשובה:
N=

<u>חלק שני-8 נקודות</u>

טו. תן דוגמא (לא ציור) לפונקציה f , קטע [a,b] ומספר טבעי n כך שסכום רימן (עם נקודות בינים בשמאל) קרוב יותר לאינטגרל האמיתי מאשר סכום הטרפזים.

שאלה זו זהה בשני הטורים ויש לה אותה תשובה.

<u>מבחן מועד ב באנליזה נומרית</u>
<u>יום ה, ט אדר התשס"ו 9-3-2006</u>

- מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.
- מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- יש לחשב את כל החשובים או בשבר רגיל או שבר עשרוני עם שתי ספרות עשרוניות.

בהצלחה.

שאלה 1.(36 נקודות)
שאלה זו עוסקת בשיטת ניוטון רפסון.
חלק ראשון- 16 נקודות
הבט על $f(x)=xe^x$ ו $x_0=1$. חשב במחברתך את הסדרה המתקבלת משיטת ניוטון רפסון:

א. $x_1=$

ב. $x_2=$

ג. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$, $e_3=$

ה. חשב את $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה e_{n+1}/e_n מתכנסת? תשובה:

ז. חשב את $e_1/(e_0)^2=$, $e_2/(e_1)^2=$, $e_3/(e_2)^2=$

ח. לאיזה ערך הסדרה $e_{n+1}/(e_n)^2$ מתכנסת?
תשובה:

חלק שני-10 נקודות
נתונה המשואה $x^3-3x^2+2x+1=0$.

ט. מצא קטע שבו למשואה יש שרש p. תשובה:

הצב את הקצה השמאלי של הקטע שמצאת בסעיף הקודם בתור x_0 , והשתמש בשיטת ניוטון רפסון לחשובים הבאים:

י. חשב את x_1: תשובה

יא. חשב את x_2: תשובה

יב. חשב את x_3: תשובה

יג. הערך את מרחק x_3 מהשורש p שעליו דברנו בסעיף ט. תשובה

חלק שלישי(10 נקודות)

נביט על $f(x)=(\ln(x))^2=\ln(x)\ln(x)$. מצא לה שורש, ועבור כל x_0 קרוב לשורש הגדר את הסדרה x_n על ידי נוסחת ניוטון רפסון עבור f זו. מצא לאיזה ערך שואפת סדרת מנות ההפרשים e_{n+1}/e_n?

תשובה:

שאלה 2 (22 נקודות)

שאלה זו עוסקת בשיטת נקודות השבת הכללית. בכל 360 מעלות יש $2\prod$ רדיאנים.

חלק ראשון-12 נקודות

הבט במשואה $g(x)=\sin(x)$ הצב $x_0=1$ ברדיאנים וחשב שלשה איברים בסדרה על ידי הכלל הרקורסיבי $x_{n+1}=g(x_n)$.

א. $x_1=$

ב. $x_2=$

ג. $x_3=$

חשב במחברתך את ההפרשים $e_n=x_n-p$ כאשר p הוא גבול של הסדרה הקודמת:

ד. $e_0=$, $e_1=$, $e_2=$ $e_3=$

ה. חשב את $e_1/e_0=$, $e_2/e_1=$, $e_3/e_2=$

ו. לאיזה ערך הסדרה e_{n+1}/e_n מתכנסת? תשובה:

תשובות לחלק א'

חלק שני-10 נקודות

נתונה המשואה $x^3-18x^2+107x-209=0$.

ז. מצא קטע שבו למשואה יש שרש. תשובה:

ח. השאר את המחובר הלינארי באגף אחד, העבר את כל הבטויים לאגף שני, ומצא פונקציה שיש לה נקודת שבת מתאימה למשואה. תשובה:

ט. מצא תחום שבו לפי משפט נקודת השבת לפונקציה בסעיף ח תהיה נקודת שבת. תשובה:

י. מצא חסם לשגיאה ה n ית של סדרה המתכנסת לנקודת השבת. על השגיאה להיות פונקציה של n בלבד. תשובה:

יא. מצא n כך שהחסם שמצאת יהיה קטן מ-0.01 . תשובה:

תשובות לחלק ב

שאלה 3(22 נקודות)

שאלה זו עוסקת באינטגרציה נומרית.

חלק ראשון -22 נקודות

חשב את סכום הטרפזים המבוסס על n קטעים שוים של x^4 על הקטע -[1,4] בצע את החשוב במחברתך. הסכום נתן לבטוי על ידי 7 תתי סכום. חשב כל תת סכום לחוד, כך שיהיה פונקציה של n או קבוע ולא יכיל סיגמא.

א. תת הסכום הראשון, כפונקציה של n הוא

תשובה

ב. תת הסכום השני כפונקציה של n הוא

תשובה:

ג. תת הסכום השלישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ד. תת הסכום הרביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ה. תת הסכום החמישי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ו. תת הסכום הששי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ז. תת הסכום השביעי כפונקציה של n הוא

תשובה:

ח. חשב את השגיאה האמיתית, את המרחק בין האינטגרל ובין סכום הטרפז.

תשובה:

ט. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי השגיאה שבסעיף ח קטנה מ-0.001 .

תשובה:

$N=$

י. השתמש בנוסחת הערכת השגיאה של סכום הטרפז, ומצא חסם לשגיאה כפונקציה של n .

תשובה:

יא. מצא N כך שעבור $n>N$ מתקיים כי החסם שבסעיף י קטן מ-0.001 .

תשובה:
N=

<u>שאלה 4(10 נקודות)</u>
שאלה זו עוסקת באינטרפולציה נומרית.

נתונות שתי נקודות a,b בתחום של הפונקציה f. השתמש בנתונים $f(a), f'(a), f(b)$ ובנה פונקציה g אשר משחזרת את f ואשר מקימת את התכונות: $g(a) = f(a), g'(a) = f'(a), g(b) = f(b)$.

תשובה:

<u>שאלה 5(10 נקודות)</u>
שאלה זו עוסקת בנגזרות מסדר גבוה.

מצא את הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה $f(x)=x^2e^x$.

תשובה:

יום א, יט כסלו התשס"ז 10-12-2006 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. המבחן ללא חומר עזר.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

הציון המקסימלי במבחן הוא 104 .

במבחן 2 שאלות.

שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 14 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \sin(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(0)=0, f(\pi/2)=1$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי.
לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[0,\pi/2]$.

תשובה: $|f-p|\le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$
.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה,
והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:
$|f-p|\le$
ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת
מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p|\le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה,
והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:
$|f-p|\le$

ט.   כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:
$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0<a_1<a_2<,\dots,<a_n=\pi/2$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:
$|f-p_n|\le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים.

תשובה:
$|f-p_n|\le$

יב.   מצא N כך ש-עבור $n>N$ התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n|\le 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f=\sqrt{x^2+9}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=0.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה x=4 .

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את "f. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=4.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה x=0 .

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(0)=3, f(4)=5$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. מבוא לאנליזה נומרית מועד א התשס"ז. יום ב, א אדר התשסז 19-2-2007

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן במחברות.

במבחן 5 שאלות.

3 השאלות הראשונות הן חשוביות ומשקל כל סעיף בהן הוא 4 נקודות.

שאלה 4 היא שאלת הוכחה ומשקלה 17 נקודות.

שאלה 5 היא מיוחדת ומשקלה 15 נקודות. סה"כ $100=15+17+4\cdot17$.

בהצלחה.

<u>שאלה 1. (36 נקודות)</u> (כל סעיף בעל משקל של 4 נקודות)

הבט באינטגרל $\int_a^b (x^3+x)dx$

א. חשב את האינטגרל.

ב. חשב את סכום רימן עבור האינטגרל המבוסס על n קטעים שוים.

ג. חשב את הגבול של סכום רימן מסעיף ב כאשר n שואף ל-∞.

ד. חשב את ההפרש האמיתי בין הגבול ובין הסדרה.

ה. הצב a>0, b=2a בחשוב של הסעיף הקודם.

ו. מצא תנאי על n שיבטיח כי ההפרש של הסעיף הקודם קטן מ-ε

ז. לסעיף זה משקל של 12 נקודות:

הבט באינטגרל $\int_2^4 e^{-x^3}dx$

מצא M כך שעבור n>M מתקיים כי סכום הטרפזים עבור האינטגרל קרוב לאינטגרל בקרוב של 0.01 .

<u>שאלה 2. (20 נקודות)</u> בשאלה זו בצע חשובים עד דיוק של 4 ספרות לאחר הנקודה העשרונית.
הבט במשואה $x^2-100=0$.

א. הצב $x_0=5$ ומצא את x_1,x_2,x_3,x_4 בשיטת ניוטון רפסון.

ב. חשב את e_0,e_1,e_2,e_3,e_4 עבור $e_i=x_i-s$ כאשר s הוא שרש של המשואה המקורית.

ג. חשב את המנות e_{i+1}/e_i עבור $0\le i\le 3$.

ד. חשב את המנות $e_{i+1}/(e_i)^2$ עבור $0\le i\le 3$.

ה. מהו $\lim\ e_{i+1}/(e_i)^2$?

<u>שאלה 3. (12 נקודות)</u>

הבט במשואה $x^4-10\ x^3+25\ x^2+250x+7=0$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח כי סדרת ניוטון רפסון מתכנסת לגבול יחיד.

ב. חשב שלשה איברים בסדרה המתכנסת לשרש.

ג. הערך את $|x_3-s|$ כאשר s הוא השרש המבוקש.

<u>שאלה 4. (17 נקודות)</u>

נסח והוכח את משפט שארית לגרנז עבור פולינום האינטרפולציה.

<u>שאלה5. (15 נקודות)</u>

א. כתוב את נוסחת פרבולת טיילור: (פולינום טיילור ממעלה 2).

ב. מצא מתי הפולינום שבסעיף הקודם מתאפס.

ג. הכלל את שיטת ניוטון רפסון ומצא שיטה כללית של התכנסות לשרש אשר במקרה והפולינום בסעיף א יהפך להיות ישר, אז השיטה החדשה תהפוך לשיטת ניוטון רפסון.

ד. הצב בנוסחה של הסעיף הקודם את הבעיה $x^2=4$ ו-$x_0=1$ ומצא את 3 האיברים הראשונים של הסדרה האמורה להתכנס לשרש.

ה. מצא תנאי לכך שהשיטה תעבד.

תשובות

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. מבוא לאנליזה נומרית מועד ב

התשס"ז. יום ה, א איר התשסז 19-4-2007

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. מותרים מחשבונים.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן במחברות.

במבחן 5 שאלות.

3 השאלות הראשונות הן חשוביות ומשקל כל סעיף בהן הוא 4 נקודות.

שאלה 4 היא שאלת הוכחה ומשקלה 17 נקודות.

שאלה 5 היא מיוחדת ומשקלה 15 נקודות. סה"כ $100=15+17+17\cdot4$.

בהצלחה.

<u>שאלה 1. (36 נקודות)</u> (כל סעיף בעל משקל של 4 נקודות)

הבט באינטגרל $\int_a^b (x^3-5x)dx$

א. חשב את האינטגרל.

ב. חשב את סכום רימן עבור האינטגרל המבוסס על n קטעים שוים.

ג. חשב את הגבול של סכום רימן מסעיף ב כאשר n שואף ל-∞.

ד. חשב את ההפרש האמיתי בין הגבול ובין הסדרה.

ה. הצב a>0, b=2a בחשוב של הסעיף הקודם.

ו. מצא תנאי על n שיבטיח כי ההפרש של הסעיף הקודם קטן מ-ε

ז. לסעיף זה משקל של 12 נקודות:

הבט באינטגרל $\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\cos x}{x} dx$

מצא M כך שעבור n>M מתקים כי סכום הטרפזים עבור האינטגרל קרוב לאינטגרל בקרוב של ε.

<u>שאלה 2. (20 נקודות)</u>

הבט בפונקציה $g(x)=\sqrt{x}$.

א. מצא את נקודות השבת של g ועבור כל נקודת שבת מצא האם x_0 קרוב מספיק יגרם לסדרה להתכנס לאותה נקודת שבת.

ב. הצב $x_0=1/65536$ ומצא את x_1,x_2,x_3,x_4 ואת p נקודת השבת שאליה הסדרה מתכנסת.

ג. חשב את e_0,e_1,e_2,e_3,e_4 עבור $e_i=x_i-p$ עבור p מהסעיף הקודם, ואת המנות e_{i+1}/e_i עבור $0\le i\le 3$.

ד. מהו $\lim e_{i+1}/e_i$?

<u>שאלה 3. (12 נקודות)</u>

הבט במשואה $x^4+18x^3+119x^2-342x+1=0$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח כי סדרת ניוטון רפסון מתכנסת לגבול יחיד.

ב. חשב שלשה איברים בסדרה המתכנסת לשרש.

ג. הערך את $|x_3-s|$ כאשר s הוא השרש המבוקש.

<u>שאלה 4. (17 נקודות)</u>

נסח והוכח את משפט הקיום והיחידות של פולינום האינטרפולציה, כולל טענת העזר.

<u>שאלה5. (15 נקודות)</u>

נתונה פונקציה f המוגדרת בקטע [a,b].

א. בטא את סכום רימן כללי (לכל פונקציה) המבוסס על n קטעים שוים, שבהם נקודות הבינים הן באמצעי הקטעים.

ב. מצא נוסחת הערכת שגיאה כללית עבור הבטוי בסעיף הקודם.

ג. חשב את הסכום של סעיף א עבור $f=x^2$ בקטע [a,b].

ד. השתמש בבטוי של סעיף ב כדי להעריך את השגיאה של האינטגרל מהסעיף הקודם.

ה. מצא תנאי על n שיבטיח כי השגיאה מהסעיף הקודם קטנה מ-ε.

תשובות

יום ד, כא איר התשס"ז 9-5-2007 מבחן אמצע באנליזה נומרית

מורה: גיורא דולה. מתרגל: רענן שכטר.

מצורפים דפי נוסחאות. המבחן ללא חומר עזר.

משך המבחן הוא שעתים וחצי.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

הציון המקסימלי במבחן הוא 108 .

במבחן 2 שאלות.

שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 15 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \sin^2(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(0)=0, f(\pi/2)=1$. וסמן אותו p .

תשובה: $p=$

הערכת $|f-p|$ בצורה ראשונה:

רמז: $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע $[0,\pi/2]$.

תשובה: $|f-p| \le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: $f''=$

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי c(x)).

תשובה:

$|f-p| \le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p| \le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:

$|f-p| \le$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n-ית של f .

תשובה:

$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=\pi/2$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי c(x)).

תשובה: $|f- p_n| \le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים (או שלש פעמים).

תשובה: $|f-p_n| \le$

יב. מצא N כך ש-עבור $n>N$ התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n| \le 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f = \sqrt[3]{8+7x}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה $a=0$.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה $x=8$.

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f''. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה $a=8$.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה $x=0$.

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(0)=2, f(8)=4$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

טו. מצא נקודה x שבה ישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר טיילור שמצאת בסעיף א.
תשובה:

תשובות

מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית.

מועד א יום ה יט תמוז התשס"ז, 5-7-2007 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.

- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 8 שאלות. על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 16 נקודות..
- שאלה 6 שאלת הוכחה.
- שאלות 7-8 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות. בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

16*5+10+2*5=80+10+10=100

בהצלחה.

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{8+2x}$

א. מצא n טבעי עבורו פולינום טיילור בקטע [0,0.1] יהיה בדיוק של 1/10,000,000.

ב. כתב את הפולינום.

ג. חשב את $\sqrt[3]{8.1}$ בדיוק של 1/10,000,000.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{2401+1695x}, 0\le x\le 1$

א. נניח כי נתונות נקודות $0 = a_0 < a_1 < .... < a_{n-1} < a_n = 1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^2 e^{x^2} dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שווים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^3-10x^2-x+10$.

א. מצא את שלשת השרשים של p (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר x^3 באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $g(x)=x$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3+28x^2+140x-399$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקיימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.001.

שאלה 6

הוכח את נוסחת השגיאה עבור שיטת הטרפז.

שאלה שביעית

נניח כי נתון n מסוים, נתונות שתי פונקציות f,g, ונתונים סכומי רימן $S(n,f)$, $S(n,g)$ ו-$S(n,f+g)$ המבוססים על אותו n ועל קטעים שוים ועל נקודות בינים משמאל, ואשר הם קרוב לאינטגרלים של f,g ושל f+g על הקטע [a,b] . נניח כי $e(n,f)=\int f(x)dx-S(n,f)$ ו-

$e(n,g)=\int g(x)dx-S(n,g)$, וכי $e(n,f+g)=\int[f(x)+g(x)]dx-S(n,f+g)$ הן שלשת השגיאות האמיתיות. אז מתקים: $e(n,f+g)=e(n,f)+e(n,g)$.

שאלה שמינית

נניח כי נתונות שתי פונקציות f,g, כך שלכל $x\in[c,d]$ מתקיים $f(x)\le g(x)$. אז לכל

n טבעי ולכל נקודת השקה $a\in[c,d]$, מתקים כי פולינום טיילור של f בעל נקודת השקה a ומסדר n הוא קרוב יותר ל-f מאשר פולינום טיילור של g בעל נקודת השקה a ומסדר n קרוב ל-g . הטענה בסימונים:

$$|f(x)-p_{n,f,a}(x)|\le|g(x)-p_{n,g,a}(x)|$$

תשובות:

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית לכתת הנדסאי ערב.</u>

מועד ב יום ב כט אב התשס"ז, 13-8-2007 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 8 שאלות. על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 16 נקודות..
- שאלה 6 שאלת הוכחה.
- שאלות 7-8 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות. בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

16*5+10+2*5=80+10+10=100

בהצלחה.

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{16+3x}$

א. מצא n טבעי עבורו פולינום טיילור בקטע [0,0.1] יהיה בדיוק של 2/1,000,000.

ב. כתב את הפולינום.

ג. חשב את $\sqrt[4]{16.3}$ בדיוק של 2/1,000,000.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{512+217x}, 0\le x\le 1$

נניח כי נתונות נקודות $0=a_0<a_1<....<a_{n-1}<a_n=1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^3 e^{x^3} dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^4-10x^2+9$.

א. מצא את ארבעת השרשים של p (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר x^4 באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $g(x)=x$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3-30x^2+299x-989.8$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים. רמז: a,b לאו דוקא שלמים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.001.

שאלה 6

הוכח את משפט נקודת השבת.

שאלה שביעית

א. נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע [a,b], וחלקו אותו לשלשה קטעים שווי אורך, .[a,(2a+b)/3],[(2a+b)/3,(a+2b)/3],[(a+2b)/3,b].

על כל קטע ציירו טרפז. למשל הטרפז הראשון קדקדיו הם

.(a,f(a)),((2a+b)/3,f((2a+b)/3)). חשבו את השטח מתחת לשלשת

טרפזים הללו. קבלנו קרוב של $\int_a^b f(x)dx$

ב. נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע [c,d], וחלקו אותו ל-n קטעים שווים. את נוסחת הקרוב של הסעיף הקודם אפשר להפעיל כעת על כל אחד מהקטעים הקטנים. מתקבלת נוסחת קרוב עבור $\int_c^d f(x)dx$

חשב את נוסחת השגיאה של נוסחת הקרוב של הסעיף הקודם (בתנאי ש f גזירה פעמים בקטע [c,d]). כתבו כתשובה סופית (ותקבלו נקוד מלא) את נוסחת השגיאה שהגעתם אליה.

שאלה שמינית

נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע [a,b], חלקו אותו ל-n קטעים שווים n טבעי וקרבו את $\int_a^b f(x)dx$ בשתי דרכים שונות: פעם על ידי שיטת

סכומי רימן (עם נקודת בינים בשמאל) ופעם על ידי סכומי טרפזים. מי מהטענות הבאות נכונה? נמק בקצרה:

א. תמיד סכומי רימן יקרבו יותר טוב את $\int_a^b f(x)dx$

ב. תמיד סכומי הטרפזים יקרבו יותר טוב את $\int_a^b f(x)dx$

ג. לפעמים סכומי רימן ולפעמים סכומי הטרפזים יקרבו יותר טוב את $\int_a^b f(x)dx$

תשובות:

<u>מבחן אמצע בקורס מבוא לאנליזה נומרית</u>

יום ד, ג טבת התשס"ח, 12-12-2007 שעה 16.00 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה בשאלון בלבד. התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן שתי שאלות, שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 14 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

26*4=104

.

בהצלחה.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \cos(x)$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: $f(0)=1, f(\pi/2)=0$. וסמן אותו p .

תשובה: p=

הערכת |f-p| בצורה ראשונה:

ב. חקור את $f-p$ ומצא את הנקודה a שם ל-$f-p$ יש ערך מוחלט מקסימלי.
לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: $a=$

ג.   כהמשך ל- ב, הערך את $f-p$ בקטע $[0,\pi/2]$.

תשובה: $|f-p|\le$.

הערכת $|f-p|$ בצורה שניה:

ד.   חשב את f'' . תשובה: $f''=$
.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה,
והערך את $|f-p|$ כפונקציה של x בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:
$|f-p|\le$
ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת
מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p|\le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה,
והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:
$|f-p|\le$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:

$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0<a_1<a_2<,\ldots,<a_n=\pi/2$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה:

$|f-p_n|\le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f-p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים.

תשובה:

$|f-p_n|\le$

יב. מצא N כך ש-עבור $n>N$ התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n|\le 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f=\sqrt[3]{x+1}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=0.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה x=7 .

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f''. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=7.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה x=0 .

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(0)=1,f(7)=2$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

תשובות

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית.</u>

יום א, כז שבט התשס"ח 3-2-2008

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 14 נקודות.
- שאלה 6 שאלה חשובית בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 7 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.

- שאלות 8-9 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות.
בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

14*5+2*10+2*5=70+20+10=100

בהצלחה.

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{4+bx}$ x משתנה, $0\le b$ פרמטר.

א. חזור על תהליך הערכת השגיאה כפי שעשינו בכתה, והחלט עבור אלו ערכים של b, טור טיילור מתכנס בקטע [0,0.1].

ב. מהו b המקסימלי מבין אלו שמצאת בסעיף א?

ג. עבור d=b/2 , כאשר את b מצאת בסעיף ב, מצא מהו n שיבטיח כי המרחק שבין פולינום טיילור מסדר n ובין הפונקציה המקורית קטן מ-0.01.

ד. עבור d זה, כתוב את הפולינום.

ה. חשב את השרש בקרוב של 0.01 עבור d שמצאת בסעיף ג ו-x=0.1.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{1000+331x}, 0\le x\le 1$

ד. נניח כי נתונות נקודות $0=a_0<a_1<....<a_{n-1}<a_n=1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^{0.5}\cos(x^2)dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^3-7x-6$.

א. מצא את שלשת השרשים של p (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר x^3 באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $g(x)=x$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

ד. מיהי הנקודה שאליה הסדרה המבוססת על שיטת נקודת השבת מתכנסת הכי מהר?

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3-5x^2+2x+9$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.01.

שאלה 6

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. א. חשב את $\|A\|_\infty$. ב. מצא וקטור v כך ש- $\|A(v)\|_\infty=\|A\|_\infty$.

שאלה 7

נסח והוכח את משפט נקודת השבת עבור R אשר משתמש בקבוע ליפשיץ.

שאלה 8

רוצים לחשב אינטגרל על ידי אינטגרציה נומרית. מה יותר קרוב לתשובה הנכונה: סכום סימפסון המסתמך על m קטעים שוים ועל n=2m חצאי קטעים שוים, או סכום טרפזים המסתמך על n=2m קטעים שוים? השתמש בנוסחאות השגיאה ותוכל להתעלם מהמונים אשר מופיעים בנוסחאות. הגע למסקנה תוך שמוש במכנים בלבד.

שאלה 9

נתונה הבעיה של פתרון נומרי של המשואה f(x)=0, ונבחרו x_0,x_1. בוצע החשוב של סדרה מתכנסת על ידי שיטת המיתר.

כעת החליפו בין x_0 ו-x_1 . שוב חשבו את הסדרה.

האם שתי הסדרות זהות?

תשובות

<u>מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית.</u>

מועד ב, יום ד, יב אדר ב התשס"ח 19-3-2008

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1-5 חשוביות בטבען וכל אחת היא בעלת משקל של 14 נקודות.
- שאלה 6 שאלה חשובית בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 7 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלות 8-9 הן שאלות הבנה (כן-לא). משקל כל אחת 5 נקודות. בכל אחת-אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר, ואם התשובה היא לא, יש לתת דוגמא נגדית.

14*5+2*10+2*5=70+20+10=100

בהצלחה.

שאלה ראשונה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{16+bx}$ x משתנה, $0\leq b$ פרמטר.

א. חזור על תהליך הערכת השגיאה כפי שעשינו בכתה, והחלט עבור אלו ערכים של b, טור טיילור מתכנס בקטע [0,0.2].

ב. מהו b המקסימלי מבין אלו שמצאת בסעיף א?

ג. עבור d=b/2 , כאשר את b מצאת בסעיף ב, מצא מהו n שיבטיח כי המרחק שבין פולינום טיילור מסדר n ובין הפונקציה המקורית קטן מ-0.01.

ד. עבור d זה, כתוב את הפולינום.

ה. חשב את השרש בקרוב של 0.01 עבור d שמצאת בסעיף ג ו-x=0.2.

שאלה שניה

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{8000+1261x}, 0\leq x\leq 1$

נניח כי נתונות נקודות $0=a_0<a_1<....<a_{n-1}<a_n=1$ וכי p_n הוא פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. מצא n טבעי עבורו p_n בקטע [0,1] יהיה בדיוק של 0.001.

שאלה שלישית

נתון האינטגרל $\int_0^{\sqrt{3}/2} \sin(x^2)dx$

נניח שמחשבים אותו על ידי שיטת סימפסון עם n=2m קטעים שוים. מצא מהו n שיבטיח כי השגיאה קטנה מ-0.001.

שאלה רביעית

הבט בפולינום $p=x^3-13x-12$.

א. מצא את שלשת השרשים של p (כלם שלמים).

ב. השאר את האבר x^3 באגף אחד, העבר את שאר הבטויים לאגף השני, וקבל משואה מהצורה $g(x)=x$.

ג. עבור כל נקודת שבת של המשואה שמצאת בסעיף ב, קבע האם הנקודה היא מושכת או דוחה עבור שיטת נקודות השבת $x_{n+1}=g(x_n)$.

ד. מיהי הנקודה שאליה הסדרה המבוססת על שיטת נקודת השבת מתכנסת הכי מהר?

שאלה חמישית

הבט בפולינום $p=x^3-7x+7$.

א. מצא תחום [a,b] שבו מתקיימים תנאי המשפט המבטיח התכנסות של סדרת ניוטון רפסון לשרש. בדק את התנאים.

ב. חשב את השרש עד רמת דיוק של 0.01.

שאלה 6

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$. א. חשב את $\|A\|_\infty$. ב. מצא וקטור v כך ש- $\|A(v)\|_\infty = \frac{\|A\|_\infty}{\|v\|_\infty}$.

שאלה 7

נסח והוכח את משפט נקודת השבת עבור R אשר משתמש בקבוע ליפשיץ.

שאלה 8

נתונה פונציה f רציפה בקטע [a,b] וידוע כי $f(a)f(b)<0$. נמצא שרש על ידי שיטת החציה אשר מתבססת על הקטע [a,b] ונקבל סדרות a_n,b_n. נתון כי f גם רציפה בקטע [c=a,d=5b] וכי $f(c)f(d)<0$. שוב נשתמש בשיטת החציה עבור הקטע [c,d] ונקבל סדרות c_n,d_n. אז הגבול של הסדרות a_n,b_n שוה תמיד לגבול של הסדרות c_n,d_n .

שאלה 9

נתונה פונציה f רציפה בקטע [a,b]. מחושב סכום רימן עבור האינטגרל של f המבוסס על חלוקת [a,b] ל- k חלקים שוים שיסומן SR(k). נסמן ב-E(k) את השגיאה- ערך מוחלט של ההפרש שבין האינטגרל ו-SR(k). אז תמיד E(2k) קטן ממש (ולא שווה) ל E(k).

תשובות

מבחן אמצע בקורס מבוא לאנליזה נומרית

יום ד, כז כסלו התשס"ט, 24-12-2008 שעה 16.00 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- מותר להשתמש במחשבונים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה בשאלון בלבד. התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה.
- במבחן שתי שאלות, שאלה 1 בת 12 סעיפים, 2 בת 14 סעיפים. משקל כל סעיף 4 נקודות.

26*4=104

בהצלחה.

שאלה 1

הבט בפונקציה

$$f = \sqrt{9+7x}$$

א. חשב את פולינום האינטרפולציה המתקבל מ: f(0)=3,f(1)=4 . וסמן אותו p .

תשובה: p=

הערכת |f-p| בצורה ראשונה:

ב. חקור את f-p ומצא את הנקודה a שם ל-f-p יש ערך מוחלט מקסימלי. לא להבהל אם a לא שלמה.

תשובה: a=

ג. כהמשך ל- ב, הערך את f-p בקטע [0,1].

תשובה: $|f-p| \le$.

הערכת |f-p| בצורה שניה:

ד. חשב את f'' . תשובה: f''=

.

ה. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את |f-p| כפונקציה של x בלבד (בלי c(x)).

תשובה:

$|f-p| \le$

ו. חקור את הפונקציה של x שקבלת בסעיף ה, ומצא a שעבורו היא מקבלת מקסימום בערכה המוחלט: תשובה: $a=$.

ז. מהו חסם להפרש על סמך סעיף ו? תשובה: $|f-p| \le$

הערכת $|f-p|$ בצורה שלישית:

ח. השתמש בנוסחת השארית של Lagrange עבור פולינום האינטרפולציה, והערך את $|f-p|$ על ידי קבוע בדרך שלישית.

תשובה:

$|f-p| \le$

ט. כתוב את הנגזרת ה-n ית של f .

תשובה:

$f^{(n)}=$

י. נניח כי עבור f זו, יצרנו פולינום אינטרפולציה עבור הנקודות $a_0=0<a_1<a_2<,\ldots, <a_n=1$. נסמן פולינום זה על ידי p_n . השתמש בנוסחת השארית של Lagrange והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של x ושל n בלבד (בלי $c(x)$).

תשובה: $|f-$

$p_n| \le$

יא. השתמש בבטוי של הסעיף הקודם, והערך את $|f- p_n|$ כפונקציה של n בלבד. על n להופיע בבטוי פעמיים.

תשובה: $|f-$

$p_n| \le$

יב. מצא N כך ש-עבור n>N התשובה של הסעיף הקודם מקימת כי $|f-p_n|\le 0.001$

שאלה 2

הבט בפונקציה $f = \sqrt[3]{125+91x}$

א. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=0.

תשובה:

ב. חשב את הפולינום של סעיף א בנקודה x=1 .

תשובה:

ג. עבור ההצבה של סעיף ב, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

ד. חשב את f'. תשובה:

ה. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ב,ג(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

ו. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ג ו-ה הקודם.

תשובה:

ז. מצא את ישר טיילור (פולינום טיילור מסדר ראשון) אשר משיק לגרף בנקודה a=1.

תשובה:

ח. חשב את הפולינום של סעיף ז בנקודה $x=0$.

תשובה:

ט. עבור ההצבה של סעיף ח, חשב את השגיאה האמיתית.

תשובה:

י. הצב בנוסחת השגיאה של לגרנז את השגיאה של סעיפים ח,ט(אל תעבור לאי שויונים).

תשובה:

יא. מצא את c של משפט לגרנז שבה יתקים שויון בסעיפים ט,י.

תשובה:

יב. מצא את ישר האינטרפולציה לגרף אשר מסתמך על הנקודות $f(0)=5,f(1)=6$.

תשובה:

יג. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף א קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף ז ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

יד. מצא נקודה x שבה ישר טיילור שמצאת בסעיף ז קרוב לפונקציה יותר מאשר ישר טיילור שמצאת בסעיף א ויותר מישר האינטרפולציה שמצאת בסעיף יב.

תשובה:

תשובות