מכללת נתניה- מבחן אנליזה נומרית- התשס"ב

מועד א – יום א יד שבט 27-1-2002 שעה 12:30

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט

מחשבונים. ענה על כמה שיותר שאלות.

משקל של כל סעיף בכל שאלה 5 נקודות, למעט שאלה 1

סעיף א שאלה 2 סעיף ה שמשקלן 6 נקודות, ושאלות 2 סעיף

ח, 3 סעיף ט ו- 4 סעיף ו שמשקלן 8 נקודות כל אחת.

חשובים והצבות $23\times5=105$, נסוחי משפטים $2\times6=12$

הוכחות $3\times8=24$. סה"כ 141 נקודות. ענה על שאלות 1 ו- 4 ועל שאלה 2 **או** שאלה 3.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. תורדנה

נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום

המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה

התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת

צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות

הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב.

האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על

הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך

ולהתלונן שבגלל התשובה שלי הוא כתב תשובה

שגויה.   בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי

פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר
אם הפתוח מספיק.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ו**לא** תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

בהצלחה.

שאלה 1

I.   נסח את משפט טיילור עם שארית לגרנז

(מספיק לרשום את הנוסחה- אין צרך בתנאים)

תשובה:
$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)h^2/2+\ldots+f^{(n)}(a)h^n/n!+$
$f^{(n+1)}(c)h^{n+1}/(n+1)!+$

II. מצא בטוי מלא עבור הנגזרת ה-n -ית של

הפונקציה ,
$$f(x)=\sqrt{x^3}=x^{3/2}$$
עבור
$n>2$

תשובה:
$f'=(3/2)x^{0.5}$, $f''=(3/4)x^{-0.5}$, $f'''=(-3/8)x^{-1.5}$, $f^{(4)}=(9/16)x^{-2.5}$

נשים לב כי במונה יש החל מ- 2 $(-1)^n$, במכנה יש 2^n, וחזקת x היא
1.5-n. נותרה רק מכפלת האי זוגיים. נוציא את הגורם 3 מחוץ לסוגרים.
נשאר עם מכפלה. עבור n=3המכפלה היא 1 , עבור   n=4, המכפלה היא
3וכדומה. נשים לב כי האבר האחרון במכפלה הוא 2n-5 ונקבל את הבטוי
הבא במונה:

$bituy(n)=1*3*5*…*(2n-5)$. נכפל ונחלק את הבטוי במכפלת הזוגיים, מ- 2 עד – $(2n-6)$, ונקבל: $bituy(n)=(2n-5)!/(2*..*(2n-6))$
נוציא מהמכנה של בטוי 2 מכל גורם ונקבל במכנה: $2^{(n-3)}(n-3)!$. לכן סוף סוף $f^{(n)}(x)=(3(-1)^n(2n-5)!x^{1.5-n})/(2^n2^{n-3}(n-3)!)$. נאחד את החזקות במכנה ונקבל: $f^{(n)}(x)=(3(-1)^n(2n-5)!x^{1.5-n})/(2^{2n-3}(n-3)!)$.

ג. השתמש בתשובות של א ו- ב כדי לבטא

את $\sqrt{5^3}$ (אין צרך לחשב את הסכום).

תשובה: נשים לב כי $f(x)=x^{1.5}$, $a+h=5$. עדיף לבחור $a=4, h=1$ כדי לא לעסוק בשברים, וכדי ש- $f(a)$, וכל הנגזרות יהיו ידועים. נשים לב כי $a^{1.5-n}=4^{1.5-n}=2^{2(1.5-n)}=2^{(3-2n)}=1/(2^{(2n-3)})$. נציב זאת ונקבל:
$5^{1.5}\approx(4+1)^{1.5}=4^{1.5}+1.5*4^{0.5}*1+…+(3(-1)^n(2n-5)!4^{1.5-n})1^n/(2^{2n-3}(n-3)!(n!))$.
ד. כמה מחוברים יש לקחת בסכום של סעיף ג

כדי להבטיח כי הסכום יהיה קרוב לתוצאה האמיתית

עד כדי דיוק של אלפית=0.001? תשובה: אבר השארית הוא כמו האבר האחרון, שבו במקום כל n כותבים n+1, ובמקום a=4 כותבים נקודת בינים c, כאשר מתקיים אי השויון $4<c<5$. נשים לב כי הבטוי $c^{1.5-n}$ הוא עם מעריך שלילי, בהנחה ש- n הוא לפחות 2. נקבל: $5^{1.5-(n+1)} < c^{1.5-(n+1)} < 4^{1.5-(n+1)}$ ולכן נקבל את אי השויון הבא עבור הערך המחלט: $|R|<(3(2n-3)!)/(4^{n-0.5}2^{2n-1}(n-2)!(n+1)!)$

כעת נעשה את הטריק הבא, אשר הפוך למה שעשינו בסעיף ב.

נשים לב כי הבטוי $2^{n-2}(n-2)!$ אשר במכנה, הוא מכפלת כל הזוגיים, מ- 2 עד 2n-4. נצמצם את $(2n-3)!$ שבמונה, ושוב נקבל במונה את מכפלת האי זוגיים, מ- 1 עד 2n-3. במכנה יש עוד עצרת.
$2^{n-1}(n-1)!$ אשר במכנה, הוא מכפלת כל הזוגיים, מ- 2 עד 2n-2. מכפלת כל האי זוגיים שבמונה, מ- 1 עד 2n-3 קטנה ממכפלת הזוגיים שבמכנה מ- 1 עד 2n-2, ולכן מנה זו קטנה מ- 1. לכן נקבל:

$(3(2n-3)!)/ (4^{n-0.5}2^{2n-1} (n-2)!(n+1)!)=(3(2n-3)!)/(4^{n-0.5} 2^{n-2} (n-2)!$
$2^{n-1} (n-1)!n(n+1)*4)=(3/n(n+1) 4^{n+0.5})((2n-3)!)/(2^{n-1} (n-1)! 2^{n-2}$
$(n-2)!)< (3/n(n+1) 4^{n+0.5}) (1*3*..(2n-3))/(2*4+..*(2n-2))<$
$(3/n(n+1) 4^{n+0.5})*1$

הבטוי האחרון הוא פונקציה יורדת, ומספיק למצוא מתי הוא לראשונה קטן מ-0.001. נביט על $(3/n(n+1) 4^{n+0.5})<0.001$, נכפל בהצלבה ונקבל $3000<$ $n(n+1) 4^{n+0.5}$, או $3000< n(n+1) 2^{2n+1}$ ונתחיל להציב ערכים עד שיתקים אי השויון. עבור $n=3$, נקבל $12*2^7=1536$, קטן מדי. נציב $n=4$ נקבל $4*5*2^9=5*2^{11}=10240$. לכן צריכים 4 מחוברים.

V. כתוב את אי השויון שבו השתמשת בסעיף ד,

בשלב שבו החלפת את c.

תשובה: בתוך תשובת סעיף ד.

שאלה 2

נתונות הנקודות $(p,f(p)),(q,f(q)),(r,f(r))$ ומחפשים פולינום

שיעבר דרכן.

I. מהי מעלתו של פולינום אשר עובר בנקודות אלו? תשובה: 2 או פחות.

II. כתוב מערכת לינארית אשר מקדמי הפולינום מקימים.

$$\begin{pmatrix} 1 & p & p^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & r & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(p) \\ f(q) \\ f(r) \end{pmatrix}$$

תשובה:

III. נתון אודות f כי $f(1)=1, f(0)=2, f(-1)=1$ כתוב מערכת

לינארית שמקימים מקדמי הפולינום. תשובה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV. נתון אודות f כי $f(1)=1, f(0)=2, f(-1)=1$. מצא את הפולינום

(בכל שיטה שהיא): תשובה: נביט במטריצה של סעיף ג. אז מהמשוואה השניה $c=2$. נציב ונקבל $a-b=-1, a+b=-1$. לכן $b=0$ ו- $a=-1$, ולכן המשוואה היא $y=2-x^2$.

V. נסח את משפט השארית של לגרנז עבור פולינומי אינטרפולציה.

תשובה:

נתונות נקודות $x_0<x_1<\ldots<x_n$ נתונה f אשר גזירה n+1 פעמים, ונגזרתה ה-n+1 רציפה בקטע $[x_0,x_n]$. אז לכל x בקטע השונה מהנקודות $x_0<x_1<\ldots<x_n$, קימת נקודה c_x בקטע כך שמתקיים:

$$f(x)=p(x)+(f^{(n+1)}(c_x)(x-x_0)\ldots(x-x_n))/(n+1)!$$

VI. הצב את הנתונים של סעיף ג (כל אלו שאפשר) במשפט

של סעיף ה.

תשובה: $x_0<x_1<\ldots<x_n=-1<0<1$ ולכן $n=2$, ולכן $n+1=3$ ונקבל:
$R=f^3(c_x)(x+1)(x-0)(x-1)/3!= f^3(c_x)(x^3-1)/6$

VII. נתונות הנקודות $(p,f(p)),(q,f(q)),(r,f(r)),(s,f(s))$
רשום את התהליך של נוויל לחשוב פולינום האינטרפולציה.
אין צורך לחשב ממש, אבל יש לבטא כל פולינום באמצעות
הקודמים לו. בטא רק את הפולינומים עד סדר 2 כולל. אין צרך

לפשט. תשובה: נניח כי g עוברת ב- p,q. אז $g=[(f(p)(x-q)-f(q)(x-p)]/(x-q)-(x-p)$. נניח כי h עוברת ב- q,r. אז $h=[(f(q)(x-r)-f(r)(x-q)]/(x-r)-(x-q)$. נניח כי k עוברת ב- r,s. אז $k=[(f(r)(x-s)-f(s)(x-r)]/(x-s)-(x-r)$. עד הנה כל הפולינומים ממעלה ראשונה. נביט על הפולינומים ממעלה שניה. נניח כי m עוברת ב- p,q,r. אז $m=[(g(x)(x-r)-h(x)(x-p)]/(x-r)-(x-p)$. נניח כי n עוברת ב- q,r,s. אז $n=[(h(x)(x-s)-k(x)(x-q)]/(x-s)-(x-q)$. אלו כל הפולינומים מסדר 2 .

VIII. הוכח את משפט שארית לגרנז עבור פולינום אינטרפולציה.

הוכחה:

מהמחברת.

שאלה 3

I. חשב את סכום Riemann עבור הפונקציה $f=x^2$, בקטע

כלשהו [a,b]. בחר n=4 קטעים שוים ואת נקודת הבינים להיות

בשמאל כל תת קטע. פשט.

תשובה: $S=((b-a)/4)(f(a)+f(a+(b-a)/4)+f(a+2(b-a)/4)+f(a+3(b-a)/4)=((b-a)/4)(f(4a/4)+f((3a+b)/4)+f((2a+2b)/4)+f((a+3b)/4)=((b-a)/64)(16a^2+9a^2+6ab+b^2+4a^2+8ab+4b^2+a^2+6ab+9b^2)=((b-a)/64)(30\,a^2+20ab+14\,b^2)=((b-a)/32)(15\,a^2+10ab+7\,b^2)=((15\,a^2b+10a\,b^2+7\,b^3)-(15\,a^3+10\,a^2b+7\,ab^2)))/32=(7\,b^3+3a\,b^2+5\,a^2b-15\,a^3)/32$

II. חשב את סכום Riemann עבור הפונקציה $f=x^2$, בקטע

[1,4], n כללי. בחר את הקטעים כשוים ואת נקודת

הבינים להיות בשמאל כל תת קטע.

נוסחאות:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

תשובה ראשונית:

$$\frac{(4-1)}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{3(k-1)}{n})^2 = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{6(k-1)}{n}+\frac{9(k-1)^2}{n^2})$$

תשובה סופית:

$$=\frac{3}{n}n+\frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)+\frac{27}{n^3}\sum_{k-1}^{n}(k-1)^2 = 3+\frac{18}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}+\frac{27}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=$$

$$=3+\frac{9(n-1)}{n}+\frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}3+9+9=21$$

III. חשב את הגבול של הסכום שבסעיף א: תשובה: בסעיף הקודם.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

IV. רוצים לחשב את האינטגרל
ולצרך זה משתמשים בשיטת הטרפז עבור n=3.

כתוב את הבטוי. אין צרך לחשב. עדיף לכתב e מאשר ..2.718

תשובה: s=(h/2)(f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+f(b))

$$f=e^{-x^2}$$

במקרה זה, a=0, b=1, h=1/3, a+h=1/3, a+2h=2/3
ונקבל: $s=(1/6)(e^{-0}+2e^{-(1/9)}+2e^{-(4/9)}+e^{-1})$.

V. כתוב את כל הנגזרות של

עד סדר 3 כולל:

נגזרות: $f'=-2xf,\ f''=-2f+4x^2f=(4x^2-2)f,\ f'''=8xf-2x(4x^2-2)f=(12x-8x^2)f=4x(3-2x)f$

VI. הערך את השגיאה של התוצאה בסעיף ד. תשובה:

נוסחת השארית: $R=(f''(c_x)(b-a)h^2)/12$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

הבטוי המסבך ביותר כאן הוא $f''(c_x)$, ונשים לב כי f''' חיובית בקטע [0,1], כיון שגם $4x$, גם $(3-2x)$ וגם f חיוביות בקטע, ולכן גם מכפלתן. לכן f'' עולה הקטע, וחסומה בין קצוותיה. ושם, $f''(0)=(0-2)e^{-0},\ f''(1)=(4-2)e^{-1}$. לכן נקבל:

$-2< f''(c_x)<2/e$ ובסך הכל: $(-2*1*(1/3)^2)/12<R<(2*1*(1/3)^2)/12e$, או $-1/54<R<1/54e$

VII. רוצים לחשב את האינטגרל ולצרך זה משתמשים בשיטת סימפסון ו- $n=3$.

כתוב את הבטוי. אין צרך לחשב. עדיף לכתב e מאשר 2.718..

תשובה: במקרה זה $h=1/3,\ a=0,\ b=1$ ונקבל:

$s=(h/6)(f(a)+4f(a+h/2)+2f(a+h)+4f(a+3a/2)+2f(a+2h)+4f(a+5h/2)+f(b))=(1/18)(e^{-0}+4e^{-(1/36)}+2e^{-(1/9)}+4e^{-(1/4)}+2e^{-(4/9)}+4e^{-(25/36)}+e^{-1})$

VIII. עושים שוב את סעיף ד עם שיטת הטרפז ו- n כללי.

מהו n שיבטיח עבור שיטת הטרפז שגיאה קטנה מ- 0.001?

תשובה: נציב בנוסחת השגיאה $a=0,b=1,h=1/n,\ -2<f''<2/e$ ונקבל:

$(-2*1*(1/n)^2)/12<R<2*1*(1/n)^2)/12e$, או $-1/6n^2<R<1/6en^2$. מבין שני הקצוות, הבטוי הגדול בערכו המחלט הוא השלילי ונקבל: $1/6n^2<0.001$ או מה ששקול $1000/6=166.666<n^2$, או $n>13$.

ט. הוכח את נוסחת השארית עבור שיטת הטרפז. הוכחה:

במחברת.

שאלה 4

I. נתונה המשואה $x^3+x^2-5x-5=0$. כתוב את כל

השלבים של ארבע איטרציות בשיטת החציה

עבור $a=0, b=16$. תשובה: $f(0)=-5<0, f(16)=16^3+16^2-80-5>0,$

$(0+16)/2=8, f(8)=512+64-40-5>0$

$[a_1=0 \quad ,b_1=8 \quad],$

$(0+8)/2=4, f(4)=64+16-20-5>0$

$[a_2=0 \quad ,b_2=4 \quad],$

$(0+4)/2=2, f(2)=8+4-10-5<0$

$[a_3= 2 \quad ,b_3=4 \quad],$

$(2+4)/2=3, f(3)=27+9-15-5>0$

$[a_4=2 \quad ,b_4=3 \quad],$

II. נתונה המשואה $y=0.4x^2+2.6x-45=0$.

כתוב את כל השלבים של שתי איטרציות בשיטת המיתר

עבור $x_0=0, x_1=16$.

$X_{n+1}=(x_nf(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n))/(f(x_{n-1})-f(x_n))$. F(0)=-45, f(16)=0.4*256+2.6*16-45=102.4+41.6-45=144-45=99, x_2=(16*(-45)-0*(99))/(-45-99)=16*45/144=45/9=5, f(5)=0.4*25+2.6*5-45=10+13-45=-22, x_3=(5*99-16*(-22))/99-(-22))=(11*45+11*32)/(11*9+11*2) =(45+32)/11=77/11=7

תשובה: $x_2=$, $x_3=$

III. נתונה המשואה $y=3x^3-350x+1750=0$

כתוב את כל השלבים של שתי איטרציות בשיטת

המשיק עבור $x_0=0$. תשובה: $x_1=$, $x_2=$

$x_{n+1}=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))= x_n-(3 x_n^3-350 x_n +1750)/(9 x_n^2-350)$ =(x_n *(9 x_n^2-350)-(3 x_n^3-350 x_n +1750))/(9 x_n^2-350) =(6 x_n^3-1750)/ (9 x_n^2-350)

וכעת נציב: x_1=(6* 0^3-1750)/ (9 *0-350)=1750/350=5.

x_2=(6* 5^3-1750)/ (9 *5^2-350) =(750-1750)/(225-350)=(-1000)/(-125)=8.

IV.בהנחה שהסדרה בסעיף ב מתכנסת ל- 6, חשב את סדרת

ההפרשים e_n, ואת סדרת המנות e_{n+1}/e_n. תשובה:

$\alpha=6$, $x_0=0$, $x_1=16$, $x_2=5$, $x_3=7$, e_0=0-6=-6, e_1=16-6=10, e_2=5-6=-1, e_3=7-6=1,

e_1/e_0=10/-6=-5/3, , e_2/e_1= -1/10, , e_3/e_2=-1

V. בהנחה שהסדרה בסעיף ג מתכנסת ל- 10, חשב את סדרת

ההפרשים e_n, ואת סדרת המנות e_{n+1}/e_n. תשובה:

$\alpha=10$, $x_0=0$, $x_1=5$, $x_2=8$, $e_0=0-10=-10$, $e_1=5-10=-5$, $e_2=8-10=-2$,

$e_1/e_0=1/2$, $e_2/e_1=2/5$

ו. הוכח את הקשר בין סדרת המנות ובין g', עבור בעית נקודות

השבת $g(x)=x$. הוכחה:. $e_{n+1}=x_{n+1}-\alpha=g(x_n)-g(\alpha)$.

לפי משפט ערך הבינים של לגרנז יש נקודת בינים כך ש-

$g(x_n)-g(\alpha)=g'(c_n)(x_n-\alpha)=g'(c_n)\,e_n$.

והקשר מתקבל על ידי העברת אגפים.

מכללת נתניה- מבחן אנליזה נומרית- התשס"ב

מועד ב – יום ג כא אדר 5-3-2002 שעה 9:00

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט

מחשבונים. ענה על שאלות 1 ו- 2, ובחר אחת משאלות 3 או 4.

משקל של כל סעיף בכל שאלה 5 נקודות, למעט שאלה 1

סעיף ו שאלה 2 סעיף ז שמשקלן 10 נקודות.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. תורדנה

נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום

המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה

התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת

צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות

הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב.

האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על

הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך

ולהתלונן שבגלל התשובה שלי הוא כתב תשובה

שגויה. בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי

פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר

אם הפתוח מספיק.

בזמן המבחן זכור כי שאר חבריך לשכבה רוצים לראות אותי במהלך

המבחן ונסה לקצר בשאלותיך.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ו**לא** תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

בהצלחה.

שאלה 1 -שאלת חובה

א. נתונות הנקודות (0,1),(1,3),(2,7). מצא את פולינום לגרנז אשר

עובר בנקודות אלו- בכל שיטה שהיא.

פתרון :

$p(x)=ax^2+bx+c,\ p(0)=c=1,\ p(1)=a+b+c=3,\ p(2)=4a+2b+c=7, \Rightarrow$
$a+b=2,\ 4a+2b=6,\ \Rightarrow a+b=2,\ 2a+b=3,\ \Rightarrow a=b=c=1,$
$\Rightarrow p(x)=x^2+x+1$

תשובה: הפולינום p:

ב. נתון כי הפונקציה המקורית f אשר עוברת ב (0,1),(1,3),(2,7)

גזירה בקטע אינסוף פעמים ובקטע זה, $4<|f'''|,3>|f''|,2>|f'|,1>|f|$.

השתמש ב(חלק) מנתונים שבסעיף ומצא פונקציה R

המקימת כי בקטע [0,2] מתקיים כי $|f-p|<|R|$, כאשר p הינה

הפולינום שמצאת בסעיף א. תשובה: הפונקציה R:

תשובה:
$n=2,\ n+1=3,\ R=(f'''(c)(x-0)(x-1)(x-2))/3!,\ |R|\le(|4x(x-1)(x-2)|)/6.$

III.מצא מספר חיובי M כך שבקטע [a,b] מתקיים כי $|R|<M$.

עבור R אשר יצאה בסעיף ב. תשובה: המספר M:

תשובה: יש לחסום את הפונקציה $x(x-1)(x-2)$ כאשר נתון כי x משתנה בקטע [0,2]. אז מתקיים : $0\le x\le 2$, $-1\le x-1\le 1$, $-2\le x-2\le 0$, ולכן, $|R|\le(4\bullet 2\bullet 1\bullet 2)/6=8/3$.

ד. נניח כי פונקציה f כלשהי מוגדרת בקטע [0,2] גזירה אינסוף

פעמים ומקימת כי לכל n, $|f^{(n)}|<n+1$. נניח שמחושב p_n,

פולינום האינטרפולציה על הקטע המבוסס על ערכי הפונקציה

ב-n+1 נקודות שוות מרחק. מצא בטוי R_n התלוי ב- n אך לא ב- x,

כך ש-לכל n מתקיים כי $|f-p_n|<R_n$. תשובה:

$R=(f^{(n+1)}(c)(x-0)(x-(2/n))(x-(4/n)))\ldots(x-2)/(n+1)!$
כל אחד מהגורמים במונה תלוי ב- x, ויש לחסום אותו על ידי מספר קבוע. לפי הנתון, $|f^{(n+1)}|<n+2$. כמו כן לפי הנתון $0\le x\le 2$, ולכן נובע כי $-2\le -(2/n)\le x-(2/n)\le 2-(2/n)\le 2$, וכן לכל שאר הגורמים. לכן נקבל:

$|R|\le((n+2)\bullet 2\bullet 2\bullet 2\bullet\ldots\bullet 2)/(n+1)!=((n+2)2^{n+1})/(n+1)!=S(n)$

V .מצא עבור איזה n מקימת הפונקציה של סעיף ד כי

$|f-p_n|<0.001$. תשובה: נשתמש בבטוי של הסעיף הקודם שהוא (לפחות החל ממקום מסוים) סדרה מונוטונית יורדת כפונקציה של n, ולכן נציב עד שנקבל בטוי הקטן מ- 0001.

$S(1)=(3\bullet 2^2)/2=6$, $S(2)= (4\bullet 2^3)/6=16/3$, $S(3)= (5\bullet 2^4)/24=10/3$,

$S(4)= (6\bullet 2^5)/120=24/15$, $S(5)= (7\bullet 2^6)/720=28/45$,
$S(6)= (8\bullet 2^7)/5040=64/315$, $S(7)= (9\bullet 2^8)/40320=2/35$,
$S(8)= (10\bullet 2^9)/9!=8/567$, $S(9)= (11\bullet 2^{10})/10!=44/2835$,
$S(10)= (12\bullet 2^{11})/11!=32/51975<0.001$,

ו. נסח והוכח את משפט קיום פולינום האינטרפולציה.

במחברת

שאלה 2 – שאלת חובה

בחשובים של שאלה זו, **אל** תעביר בטוי מהצורה $e^{0.5}$ לצורה

1.648721. גם לך יהיה יותר קל לכתב, וגם לי יותר קל לבדק.

הבט באינטגרל

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{x^2}dx$$

IX. חשב סכום רימן לאינטגרל . השתמש ב n=4 קטעים שוים

ובנקודות הבינים בשמאל של כל תת קטע.

תשובה:

$S=[(b-a)/4] \bullet (f(a)+f(a+(b-a)/4)+f(a+2(b-a)/4)+f(a+3(b-a)/4))$
$=(1/4) \bullet (f(0)+f(1/4)+f(2/4)+f(3/4))=(1+e^{(1/16)}+ e^{(1/4)}+ e^{(9/16)})/4$

X. הערך את האינטגרל על ידי שיטת הטרפז ו n=4.

$S=[(b-a)/4] \bullet (f(a)+2f(a+(b-a)/4)+2f(a+2(b-a)/4)+2f(a+3(b-a)/4)$
$+f(b))=(1/4) \bullet (f(0)+2f(1/4)+2f(2/4)+2f(3/4)+f(1))=(1+2e^{(1/16)}+$
$2e^{(1/4)}+ 2e^{(9/16)})+ e)/4.$

תשובה:

XI. הערך את השגיאה בסעיף ב. כדאי לכתב בטויים כמו $e^{0.5}$

במקום בטויים כמו 1.648721. תשובה:

$itegral-S=(f''(c)(b-a)h^2)/12=(f''(c)(1-0)(1/4)^2)/12=f''(c)/192.$

$.f'(x)=2xf(x),\ f''(x)=(2+4x^2)f(x),\ f'''(x)=(12x+8x^3)f(x).$

נשים לב כי f''' חיובית בקטע, ולכן f'' עולה, ולכן חסומה על ידי ערכיה בקצוות, כלומר בקטע זה מתקים כי $f(0) \le f(x) \le f(1)$. או,
כי $2 \le f(x) \le 6e$ נציב ונקבל $1/96=2/192 \le integral-S \le 6e/192=e/32$

XII. הערך את האינטגרל על ידי שיטת סימפסון ו n=4.

תשובה:

$S=[(b-a)/6] \bullet (f(a)+4f(a+(b-a)/8)+2f(a+ (b-a)/4)+ 4f(a+3(b-a)/8)+$
$2f(a+2(b-a)/4) +4f(a+5(b-a)/8)+2f(a+3(b-a)/4) +4f(a+7(b-a)/8)+$
$f(b))=(1/6) \bullet (f(0)+4f(1/8)+2f(1/4)+4f(3/8)+2f(2/4)+4f(5/8)+$
$2f(3/4)+4f(7/8)+f(1))=(1+4e^{(1/64)}+2e^{(1/16)}+ 4e^{(9/64)}+ 2e^{(1/4)}+$
$4e^{(25/64)}+ 2e^{(9/16)})+ 4e^{(49/64)}+ e)/6.$

XIII. הערך את השגיאה בסעיף ד. תשובה:

$integral-S=(f''''(c)(b-a)(h/2)^4)/180=(f''''(c)(1-0)(1/8)^4)/180=f''''(c)/4096$

נמשיך לגזור את f .

$f'''(x)=(12x+8x^3)f(x)$, $f''''(x)=(12+48x^2+16x^4)f(x)$,
$f'''''(x)=(120x+160x^3+32x^5)f(x)$. $f'''''>0$

לכן f'''' עולה, וחסומה על ידי ערכיה בקצוות, ולכן מתקיים כי

. $f''''(0)\leq f''''(x)\leq f''''(1)$ או, $12\leq f''''(x)\leq 76e$. נציב ונקבל

$4096/12=1024/3\leq integral-S\leq 76e/4096=19e/1024$

XIV. מצא n כך שהחל ממנו הערך של האינטגרל האמיתי והערך

של שיטת סימפסון המבוססת על n קטעים שוים, מקימים כי

ההבדל ביניהם קטן מ- 0.001. תשובה:

$integral-S=(f''''(c)(b-a)(h/2)^4)/180=(76e(1-0)(1/2n)^4)/180=$
$76e/2880n^4=19e/720n^4<0.001\Rightarrow 1900e<720n^4\Rightarrow(190e/72)<n^4$
$\Rightarrow(95e/36)=7.17<n^4\Rightarrow 1<n$

XV. נסח והוכח את משפט הערכת השגיאה בשיטת סימפסון:

שאלה 3 - רשות ענה על שאלה 3 או על שאלה 4

I. נתונה המשואה $x^3-15x^2+10x-5=0$. מצא הצבה אשר תעביר

את המשואה לצורה שקולה למקורית ואשר אין בה איבר רבועי.
$-15/3=-5$ ולכן נציב $z=x-5$ או $x=z+5$ או

$$(z+5)^3-15(z+5)^2+10(z+5)-5= z^3+15z^2+75z+125-15z^2-150z-375 +10z+50-5= z^3-65z-205$$

ההצבה:

המשואה השקולה חסרת האיבר הרבועי:

II. נתונה המשואה $z^3-3pz-2q=0$. מהי ההצבה של קרדן (טרטליה)?
תשובה:
$z=(\sqrt{p})\,(u+(1/u))$

$$z^3=(\sqrt{p})^3\,(u+(1/u))^3=\sqrt{p}\,p(u^3+3u+3/u+1/u^3) = \sqrt{p}\,p(u^3+1/u^3)+ \sqrt{p}\,p(3u+3/u)= \sqrt{p}\,p(u^3+1/u^3)+3p\,\sqrt{p}\,(u+1/u)=$$

$\sqrt{p}^3\,(u^3+1/u^3)+3pz=0$, ולכן, $z^3-3pz=2q=\sqrt{p}^3\,(u^3+1/u^3)$, ולכן,
$u^3+1/u^3=2q/\sqrt{p}^3$, או, $u^6+1 =2q\,u^3/\sqrt{p}^3$ או, . $u^6-2q\,u^3/\sqrt{p}^3+1 =0$

הראה את הפתוח המראה כי מתקבלת משואה שקולה
ממעלה 6. פתוח:

III. נתונה המשואה $z^3-3z+2=0$ פתור אותה ומצא את u^3.

תשובה: מצא גם את u. תשובה: במקרה זה אפשר להציב
$p=1,q=-1$ ונקבל: $u^6+2u^3+1=0$. או, $(u^3+1)^2=0$, או $u^3+1=0$,
או, $u^3=-1$, או , $u=-1$. לכן $z=(\sqrt{p})(u+(1/u))=(-1+1/-1)=-2$
וזהו אכן שרש כדרוש.
מצא גם את z. תשובה:

IV. פתח את הפונקציה $y=\sin(x)$ לטור טיילור סביב $a=0$

כתוב את האיבר הכללי.

תשובה:
$f'=f^{(5)}=f^{(9)}=\ldots=\cos(x), f=f^{(4)}=f^{(8)}=\ldots=\sin(x), f''=f^{(6)}=f^{(10)}=\ldots=-\sin(x), f'''=f^{(7)}=f^{(11)}=\ldots=-\cos(x),$

ולכן:
$\sin(x)=\sin(0+x)=0+1\bullet x-0\bullet x^2/2-1\bullet x^3/3!+\ldots+(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$

V. כמה איברים צריך לקחת בטור של סעיף ד כדי להבטיח

שהשגיאה (של $\sin(1)$)תקטן מ 0.001 תשובה:

$R=(f^{(n+1)}(x)x^{(n+1)})/(n+1)!, x=1, |f^{(n+1)}(x)|\leq 1, |R|\leq 1/(n+1)!\leq 0.001, 1000\leq(n+1)!, n+1=7, n=6$

שאלה 4- רשות ענה על שאלה 3 או על שאלה 4

VI. נתונה המשואה $x^3+3x^2-2x-6=0$. כתוב את

התוצאות של ארבע איטרציות בשיטת החציה

עבור $a=0, b=16$. תשובה:

$c=8, f(8)=512+192-16-6>0, [a_1= 0 \ ,b_1= 8 \ ],$
$c=4, f(4)=64+48-8-6>0, [a_2= 0 \ ,b_2= 4 \ ],$
$c=2, f(2)=8+12-4-6>0, [a_3= 0 \ ,b_3= 2 \ ],$
$c=1, f(1)=1+3-2-6<0, [a_4= 1 \ ,b_4= 2 \ ],$

VII. נתונה המשואה $y=-(x^2/12)+(5x/6)+3=0$.

כתוב את התוצאות של שתי איטרציות בשיטת המיתר

עבור $x_0=0, x_1=16$. תשובה: $x_2= \quad , x_3=$

$x_{n+1}=(x_{n-1} f(x_n)-x_n f(x_{n-1}))/ (f(x_n)-f(x_{n-1})), f(x_0)=f(0)=3,$
$f(x_1)=f(16)=-256/12+80/6+3=-64/3+40/3+3=-8+3=-5,$
$x_2=(x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0))/ (f(x_1)-f(x_0))=(0(-5)-16(3))/(-5)-3 =-48/-8=6, f(x_2)=f(6)=-36/12+30/6+3=-3+5+3=5,$
$x_3=(x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1))/ (f(x_2)-f(x_1))= (16(5)-6(-5))/(5-(-5))=110/10=11$

VIII. נתונה המשואה $y=x^3-4x+4=0$

כתוב את התוצאות של שתי איטרציות בשיטת

המשיק עבור $x_0 =0$. תשובה: $x_2= \quad , x_1=$

$x_{n+1}= x_n-(f(x_n)/f'(x_n)), x-(x^3-4x+4)/(3x^2-4)= (x(3x^2-4)-(x^3-4x+4))/(3x^2-4)= (2x^3+4)/(3x^2-4),$
$x_{n+1}=(2x_n^3+4)/(3x_n^2-4), x_1=(0+4)/(0-4)=-1, x_2=(-2+4)/(3-4)= 2$

IX. הגדר בעית נקודות שבת מסדר שני:

בעית נקודות שבת, $g(x)=x$ נקראת מסדר שני אם מתקים בשרש s, כי $g'(s)=0$.

X. הוכח כי שיטת ניוטון רפסון היא שיטת נקודות שבת מסדר שני:

$g(x)=x-(f(x)/f'(x))$, $g'(x)=1-(f'f'-ff'')/(f'f')=1-1+(ff''/f'f')=$
$ff''/f'f'$. $g'(s)=f(s)f''(s)/f'(s)f'(s)=0$.

בהצלחה