

מבחן אלגברה לינארית למנהל עסקים- מורה: גיורא דולה.

מועד א. המבחן ללא חמר עזר למעט מחשבוני לא מדעיים. המבחן נמשך שעתיים וחצי. נא לענות את התשובות על טופס השאלון על ידי הקפת האפשרות הנכונה. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תאסף. בהצלחה.

כל סעיף שבו יש להקיף את האפשרות הנכונה שוה ערך לכל סעיף אחר כזה. כלומר אם למשל ישנה שאלה שבה יש שני סעיפים ושאלה אחרת שבה יש ארבעה סעיפים, המשקל הכולל של השאלה השניה הוא פי שנים מאשר השאלה הראשונה. במבחן יש 39 סעיפים כאלו ב-11 שאלות. שאלות 1-10 הן אודות חומר שהיה בהרצאה, שאלה 11 היא אודות חומר חדש.

בחלק מהשאלות יש סעיף שנועד לתת אפשרות לענות תשובה נכונה בלי לעשות את כל החשבונינעס אלא רק את חלקם. בשאלונים של שנה שעברה הוא ניכר על ידי המלים 'המטריצה כשהיא משלשית'. גם השנה יש כאלו סעיפים עם המלים: 'כאשר המטריצה משולשית'. כיון שניתן לעשות את האלימינציה של גאוס בכמה אפשרויות, מודגש בזאת כי הכונה בסעיף המשולשית לסדר הבא: משמאל לימין ומלמעלה למטה בלבד, בלי החלפת שורות ובלי חלוקת אף שורה בקבוע. שלא כמו שנה שעברה-סעיף זה הוא חובה. כל סעיף שבו לא נמצאת התשובה הנכונה בשאלון, יזכה את כל הכתה במלא הנקודות, בלי קשר לתשובה שסומנה.

1. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-z שוה ל-

$$1\text{-א} \begin{cases} 1 \\ 1 \\ -2 \end{cases} \quad 2\text{-א} \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 2 \end{cases} \quad 3\text{-א} \begin{cases} 2 \\ 1 \\ -2 \end{cases} \quad 4\text{-א} \begin{cases} 3 \\ -1 \\ 2 \end{cases}$$

ב-מספר פתרונות המערכת הוא ב-1 אין פתרון ב-2 פתרון יחיד. ב-3 אינסוף פתרונות.

תשובה: המטריצה המשולשית היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} . \text{ לכן התשובות הן א-3 ו-ב-2.}$$

2. הבט במערכת הבאה ופתר אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 4x - 5y + 3z = 7 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-איברים החפשיים b שווה ל-

$$1\text{-א} \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad 2\text{-א} \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad 3\text{-א} \begin{cases} 4 \\ -9 \\ 0 \end{cases} \quad 4\text{-א} \begin{cases} 13 \\ -9 \\ 0 \end{cases}$$

ב. הבט בפתרון כאשר $x=1$. אז y שווה ל- . ב-1 $y=2$. ב-2 $y=3$. ב-3 $y=4$. ב-4 אין בכלל פתרון כזה.

ג. הבט בפתרון כאשר $x=1$. אז z שווה ל- . ג-1 $z=6$. ג-2 $z=7$. ג-3 $z=8$. ג-4 אין בכלל פתרון כזה.

ד. וקטור הזזה לפתרון כללי הוא: ד-1 $(4,7,-1)$. ד-2 $(-2,-1,1)$. ד-3 $(3,3,0)$. ד-4 $(13,9,0)$.

ה. וקטור בסיס למרחב הפתרון הוא: ה-1 $(1,2,1)$. ה-2 $(-2,-1,1)$. ה-3 $(-2,1,1)$. ה-4 $(-1,2,1)$.

תשובה: כאשר המטריצה משולשית, המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן התשובה ל-א היא א-3. נציב $x=1$ ונקבל

שתי משוואות עם שני נעלמים, $z-y=3, z+y=9$, ונובע כי $z=6, y=3$, ולכן נובע כי התשובות הן ב-2 ו-ג-1. הפתרון יוצא $x=13-2z, y=9-z$. לכן התשובות הן ד-4 ו-ה-2.

3. הבט במערכת הבאה ופתר אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 7z = 16 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-איברים החפשיים b שווה ל-

$$\begin{cases} -1 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \text{ א-4} \quad \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \text{ א-3} \quad \begin{cases} 3 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{ א-2} \quad \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \text{ א-1}$$

ב. הבט בפתרון כאשר $x=3$. אז y שווה ל- . ב-1 $y=1$. ב-2 $y=2$. ב-3 $y=3$. ב-4 אין בכלל פתרון כזה.

ג. הבט בפתרון כאשר $x=3$. אז z שווה ל- . ג-1 $z=1$. ג-2 $z=2$. ג-3 $z=3$. ג-4 אין בכלל פתרון כזה.

ד. וקטור ההזזה הוא ד-1 $(3,16,10)$. ד-2 $(-2,1,0)$. ד-3 $(4,4,3)$. ד-4 $(2,16,3)$

ה. בסיס למרחב הפתרון הוא: ה-1 $(2,-1,0)$. ה-2 $(-2,-1,1)$. ה-3 $(-1,-1,-9)$. ה-4 $(1,2,1)$.

תשובה: בשלב שהמטריצה משולשית היא בצורה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן התשובות הן: א-2. נקבל $x=2+z$, $y=2z-1$.

לכן $(x,y,z)=(2,-1,0)+z(1,2,1)$ והתשובות הן ד-2 ו-ה-3. נציב $x=3$ אז $y=z=1$ והתשובות הן ב-ג-1.

4. חשב את הדטרמיננט של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננט שוה: א. $\det=-4$ ב. $\det=4$ ג. $\det=6$ ד. $\det=-6$

תשובה: לאחר אפוס העמודה הראשונה המטריצה הופכת ל-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

, ולכן $\det=15-21=-6$ והתשובה היא ד.

5. חשב את ההפוכה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 13 \\ 5 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

א. במטריצה המשלשית: העמודה השלישית עמודת ה z שוה ל-

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 4-א } \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 3-א } \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{Bmatrix} \text{ 2-א } \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 1-א}$$

ב. במטריצה המשלשית: העמודה הרביעית (עמודת ה x של המטריצה ההפוכה) שוה ל-

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 4-ב } \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 3-ב } \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{Bmatrix} \text{ 2-ב } \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 1-ב}$$

ג. הבט במטריצה ההפוכה. אז האלכסון הראשי שוה ל-

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 4-ג } \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{Bmatrix} \text{ 3-ג } \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 2-ג } \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 1-ג}$$

ד. הבט במטריצה ההפוכה. אז האלכסון המשני שוה ל-

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 4-ד } \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{Bmatrix} \text{ 3-ד } \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 2-ד } \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 1-ד}$$

תשובה: במצב משלשי, המטריצה היא:

ולכן התשובה א-3 וב-4. נמשיך לעבד

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל את ההפוכה

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן התשובות הן ג-2 ו-ד-1.

6. נתונה קבוצת הוקטורים הבאים.

$$u=(1,1,-1,1), v=(1,2,3,4), w=(3,3,-3,3)$$

מצא בסיס לתת המרחב שהם פורשים, וענה על השאלות הבאות.

א. האם הקבוצה V, U היא בסיס לתת המרחב? א-1 כן. א-2 לא.

ב. האם הקבוצה W, U היא בסיס לתת המרחב? ב-1 כן. ב-2 לא.

ג. האם הקבוצה W, V היא בסיס לתת המרחב? ג-1 כן. ג-2 לא.

תשובה: נציב את u, v, w כעמודות מטריצה ונפעל פעולות. כשהיא משולשית

המטריצה יוצאת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן א, ג התשובה נכון, ב-ב לא נכון.

7. נתונה המערכת הבאה. מצא בסיס למרחב הפתרון שלה:

$$\begin{cases} x + y + z - w = -2 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \\ 7x + 10y + 13z + 14w = 4 \\ 5x + 6y + 7z + 2w = -4 \end{cases}$$

ענה על הסעיפים הבאים: האם קבוצות הוקטורים הבאות הן בסיסים ווקטורי הזזה לפתרון?

א. הזזה: $(-8, 6, 0, 0)$. בסיס: $(1, -2, 1, 0)$, $(8, -7, 0, 1)$ א-1 : נכון א-2 : לא נכון:

ב. הזזה: $(-5,0,3,0)$. בסיס: $(4.5,0,-3.5,1)$, $(-0.5,1,-0.5,0)$ ב-1 : נכון
ב-2 : לא נכון:

ג. הזזה: $(-7,4,1,0)$. בסיס: $(-7,5,1,-1)$, $(9,-9,1,1)$ ג-1 : נכון ג-2 : לא נכון:

תשובה: לאחר אפוס כלפי מטה, המטריצה הופכת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ולאחר אפוס כלפי מעלה מקבלים: (-

$8,6,0,0)+z(1,-2,1,0)+w(8,-7,0,1)$ לכן א נכון. נציב $z=1$ ו- $w=0$ ונקבל את וקטור ההזזה $(-7,4,1,0)$. ע"י $z=w=1$ נקבל וקטור בסיס $(9,-9,1,1)$, ועל ידי $z=1=-w$ נקבל וקטור בסיס $(-7,5,1,-1)$ ולכן ג נכון. אם נצור מהמטריצה למעלה I על עמודות 1 ו-3 נקבל את ב ולכן גם ב נכון.

8. נתונה המערכת הבאה התלויה בפרמטר: פתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 4b \\ 2x + by - 2z = 7b + 19 \\ 3x + (b-1)y - 3z = 2b + 22 \end{cases}$$

א. הערך של b עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות הוא:
א-1 $b=-1.75$. א-2 $b=-1$. א-3 $b=-2$. א-4 $b=5$. א-5 $b=2$.

ב. הערך של b עבורו אין למערכת פתרונות הוא:
ב-1 $b=-1.75$. ב-2 $b=-1$. ב-3 $b=-2$. ב-4 $b=5$. ב-5 $b=2$.

ג. פתר את המערכת עבור אותו b שיש למערכת אינסוף פתרונות. אז וקטור ההזזה הוא:

ג-1 $(0,0,3)$. ג-2 $(1,1,-2)$. ג-3 $(4,-4,0)$. ג-4 $(1,0,1)$.

ד. פתר את המערכת עבור אותו b שיש למערכת אינסוף פתרונות. אז וקטור הבסיס הוא:

1-ד (0,0,3) . 2-ד (1,1,-2) . 3-ד (4,-4,0) . 4-ד (1,0,1).

תשובה: השורה השלישית, באפוס כלפי מטה, יוצאת
 $(b+1)(b+2)z=9(b+1)(b-5)$. לכן עבור $b=-1$ יש אינסוף פתרונות, ועבור
 $b=-2$ אין פתרון, והתשובות הן א-2 ו-ב-3 . נציב $b=-1$ ונפתר את המערכת,
 ונקבל פתרון $(4,-4,0)+z(1,0,1)$ התשובות הן ג-3 ו-ד-4 .

9 . במכללה יש 3 פקולטות: מנע"ס, מחשבים ומשפטים. ידוע כי תלמיד
 מנע"ס צריך שעה הרצאה בשבוע, שעתים תרגול בשבוע ושלוש שעות עבודה
 מנהלית בשבוע. ידוע כי תלמיד מחשבים צורך בשבוע שתי שעות הרצאה,
 שעה תרגול ושעה של עבודה מנהלית, וכי תלמיד משפטים צורך בשבוע
 שעתים הרצאה, שעה תרגול ושעתים של עבודה מנהלית. ידוע כי המכללה
 הצליחה לשכר

1100 שעות הרצאה, 700 שעות תרגול ו-1100 שעות עבודה מנהלית
 בשבוע. מצא כמה תלמידים מכל חוג אפשר לרשום למכללה:
 א. תלמידי מנע"ס א-1 100 . א-2 200 . א-3 300 . א-4 50 .

ב. תלמידי מחשבים ב-1 100 . ב-2 200 . ב-3 300 . ב-4 50 .
 ג. תלמידי משפטים ג-1 100 . ג-2 200 . ג-3 300 . ג-4 50 .

תשובה: נקבל את המטריצה:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1100 \\ 2 & 1 & 1 & 700 \\ 3 & 1 & 2 & 1100 \end{pmatrix}$$
 . בסוף האפוס כלפי

מטה נקבל את
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1100 \\ 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$
 והפתרון הוא א-1, ב-2 ו-ג-3 .

10 . ישנו משק בעל שלש תעשיות תעשייה א, תעשייה ב ותעשייה ג. ידוע כי
 יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשייה א, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה
 א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג
 בערך של 10 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשייה ב,
 מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך

של 20 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 10 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשייה ג בשווי של שקל, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 20 אגורות, של תעשייה ב של 20 אגורות ושל תעשייה ג של 30 אגורות. יש השוק החפשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני שח: 30 מיליונים של תעשייה א, 100 מיליונים תעשייה ב, 110 מיליונים – ג. מצא את כמות היצור השנתית של כל תעשייה במליוני שקלים:

א. כמות תעשייה א. א-1 50. א-2 100. א-3 200. א-4 250.
 ב. כמות תעשייה ב. ב-1 50. ב-2 100. ב-3 200. ב-4 250.
 ג. כמות תעשייה ג. ג-1 50. ג-2 100. ג-3 200. ג-4 250.

תשובה: מטריצת לאונטיף היא:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & 30 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & 100 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & 110 \end{pmatrix}$$

נחליף שורות 1-3, נכפל

ראשונה ושניה ב — 10- ושלישית ב-10. נאפס כלפי מטה ונקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -1100 \\ 0 & -5 & 8 & 600 \\ 0 & 0 & 45 & 9000 \end{pmatrix}$$

משולשית: , נמשיך לאפס ונקבל א-2 ב-3

ו-ג-3.

שאלה 11 שאלה מיוחדת

נגדיר טור חזקות (אינסופי) על ידי

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

נניח כי נתון גם

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

אז הטור $f+g$ מוגדר על ידי

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$

נניח כי נתון סקלר r . אז הטור $rf(x)$ מוגדר על ידי:

$$rf(x) = ra_0 + ra_1x + ra_2x^2 + \dots + ranx^n + \dots$$

ידוע כי זהו מרחב וקטורי (מסוג

שלא ראינו בהרצאה ובתרגול).

א. נביט על הקבוצה החלקית של הטורים f עבורה מתקים כי $f(2) = 0$. נסמן

קבוצה זו ב- V . האם V תת מרחב? א-1 כן. א-2 לא.

ב. נביט על הקבוצה החלקית של הטורים f עבורה מתקיים כי $f(0)=2$. נסמן קבוצה זו ב- W . האם W תת מרחב? ב-1 כן. ב-2 לא.

נביט על שלשת הטורים הבאים:

$f(x)=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+\dots$. $g(x)=2x+2x^3+2x^5+\dots+2x^{2n+1}+\dots$.
 $h(x)=-1-x-x^2-x^3-\dots-x^n+\dots$. ועל תת המרחב של אסוף כל הטורים שהם פורשים מצא בסיס לתת מרחב זה.

- ג. הקבוצה $\{f,g\}$ היא בסיס לתת מרחב זה. ג-1 כן. ג-2 לא.
ד. הקבוצה $\{f,h\}$ היא בסיס לתת מרחב זה. ד-1 כן. ד-2 לא.
ה. הקבוצה $\{h,g\}$ היא בסיס לתת מרחב זה. ה-1 כן. ה-2 לא.

תשובות: א-1, ב-2, ג,ד,ה-1.

בס"ד יום ו יג סיון התשס"ג 13-6-2003

מבחן אלגברה לינארית למנהל עסקים- מורה: גיורא דולה.

מועד א. המבחן ללא חמר עזר למעט מחשבוני לא מדעיים. המבחן נמשך שעתיים וחצי. נא לענות את התשובות על טופס השאלון על ידי הקפת האפשרות הנכונה. המחברת משמשת כטייטה בלבד ולא תאסף. בהצלחה.

כל סעיף שבו יש להקיף את האפשרות הנכונה שוה ערך לכל סעיף אחר כזה. כלומר אם למשל ישנה שאלה שבה יש שני סעיפים ושאלה אחרת שבה יש ארבעה סעיפים, המשקל הכולל של השאלה השניה הוא פי שנים מאשר השאלה הראשונה. במבחן יש 39 סעיפים כאלו ב-11 שאלות. שאלות 1-10 הן אודות חומר שהיה בהרצאה, שאלה 11 היא אודות חומר חדש.

בחלק מהשאלות יש סעיף שנועד לתת אפשרות לענות תשובה נכונה בלי לעשות את כל החשבוינעס אלא רק את חלקם. בשאלונים של שנה שעברה הוא ניכר על ידי המלים 'המטריצה כשהיא משלשית'. גם השנה יש כאלו סעיפים עם המלים: 'כאשר המטריצה משולשית'. כיון שניתן לעשות את האלימינציה של גאוס בכמה אפשרויות, מודגש בזאת כי הכונה בסעיף המשולשית לסדר הבא: משמאל לימין ומלמעלה למטה בלבד, בלי החלפת שורות ובלי חלוקת אף שורה בקבוע. שלא כמו שנה שעברה-סעיף זה הוא חובה. כל סעיף שבו לא נמצאת התשובה הנכונה בשאלון, יזכה את כל הכתה במלא הנקודות, בלי קשר לתשובה שסומנה.

1. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-z שווה ל-

$$\text{א-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{א-2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{א-3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{א-4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ב-מספר פתרונות המערכת הוא ב-1 אין פתרון ב-2 פתרון יחיד. ב-3 אינסוף פתרונות.

תשובה: המטריצה המשולשית היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \text{ לכן התשובות הן א-2 ו-ב-2.}$$

2. הבט במערכת הבאה ופתר אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 4x - 5y + 3z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-z שווה ל-

$$1-א \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} 2-א \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 0 \end{cases} 3-א \begin{cases} 4 \\ -9 \\ 0 \end{cases} 4-א \begin{cases} 13 \\ -9 \\ 0 \end{cases}$$

ב. הבט בפתרון כאשר $z=5$. אז y שווה ל- . ב-1 $y=2$. ב-2 $y=3$. ב-3 $y=4$. אין בכלל פתרון כזה.

ג. הבט בפתרון כאשר $z=5$. אז x שווה ל- . ג-1 $x=3$. ג-2 $x=2$. ג-3 $x=1$. אין בכלל פתרון כזה.

ד. וקטור הזזה לפתרון כללי הוא: ד-1 $(4,7,-1)$. ד-2 $(-2,-1,1)$. ד-3 $(3,3,0)$. ד-4 $(13,9,0)$.

ה. וקטור בסיס למרחב הפתרון הוא: ה-1 $(1,2,1)$. ה-2 $(-2,-1,1)$. ה-3 $(-2,1,1)$. ה-4 $(-1,2,1)$.

תשובה: כאשר המטריצה משולשית, המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן התשובה ל-א היא א-1. הפתרון יוצא

$x=13-2z$, $y=9-z$. לכן נציב $z=5$ ונקבל ב-3 ו-ג-1. וכן נקבל ד-4 ו-ה-2.

3. הבט במערכת הבאה ופתר אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x - 6y + 7z = 16 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה- z שווה ל-

$$1-א \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases} 2-א \begin{cases} 3 \\ 1 \\ 0 \end{cases} 3-א \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 0 \end{cases} 4-א \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 0 \end{cases}$$

ב. הבט בפתרון כאשר $z=2$. אז y שווה ל- . ב-1 $y=2$. ב-2 $y=3$. ב-3 $y=4$. אין בכלל פתרון כזה.

ג. הבט בפתרון כאשר $z=2$. אז x שווה ל- . ג-1 $x=3$. ג-2 $x=2$. ג-3 $x=4$. אין בכלל פתרון כזה.

ד. וקטור ההזזה הוא ד-1 $(3,16,10)$. ד-2 $(-2,1,0)$. ד-3 $(4,4,3)$. ד-4 $(2,16,3)$

ה. בסיס למרחב הפתרון הוא : ה-1 $(2,-1,0)$. ה-2 $(-2,-1,1)$. ה-3 $(-1,-1,-9)$. ה-4 $(1,2,1)$.

תשובה: בשלב שהמטריצה משולשית היא בצורה:

$$y=2z-1, x=2+z \text{ . לכן התשובה היא: א-3 . נקבל } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. לכן $(x,y,z)=(2,-1,0)+z(1,2,1)$ והתשובות הן ד-2 ו-ה-3 . נציב $z=2$ אז $x=4, y=3$ והתשובות הן ב-2 ו-ג-3.

4. חשב את הדטרמיננט של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה שווה: $\det=-4$ $\det=4$ $\det=6$ $\det=-6$.
תשובה: לאחר אפוס העמודה הראשונה המטריצה הופכת ל-

$$\text{ולכן } \det = 3 - 7 = -4 \text{ והתשובה היא ד. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

5. חשב את ההפוכה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

א. במטריצה המשלשית: העמודה השלישית עמודת ה z שווה ל-

$$\text{א-1 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ א-2 } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ א-3 } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ א-4 } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ב. במטריצה המשלשית: העמודה הרביעית (עמודת ה x של המטריצה ההפוכה) שווה ל-

$$\text{ב-1 } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ב-2 } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ ב-3 } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ב-4 } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ג. הבט במטריצה ההפוכה. אז האלכסון הראשי שווה ל-

$$\text{ג-1 } \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ג-2 } \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ג-3 } \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ ג-4 } \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ד. הבט במטריצה ההפוכה. אז האלכסון המשני שווה ל-

$$\begin{cases} 6 \\ -2 \\ -1 \end{cases} 4-7 \begin{cases} -1 \\ -2 \\ -7 \end{cases} 3-7 \begin{cases} 6 \\ 3 \\ 1 \end{cases} 2-7 \begin{cases} -1 \\ 3 \\ 3 \end{cases} 1-7$$

תשובה: במצב משלשי, המטריצה היא:

$$\text{ולכן התשובות א-1 וב-2. נמשיך לעבד} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ונקבל את ההפוכה} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ ולכן התשובות הן ג-4 ו-ד-3.}$$

6. נתונה קבוצת הוקטורים הבאים.

$$u=(1,1,-1,1), v=(1,2,3,4), w=(3,3,3,3)$$

מצא בסיס לתת המרחב שהם פורשים, וענה על השאלות הבאות.

א. האם הקבוצה V, U היא בסיס לתת המרחב? א-1 כן. א-2 לא.

ב. האם הקבוצה W, U היא בסיס לתת המרחב? ב-1 כן. ב-2 לא.

ג. האם הקבוצה W, V היא בסיס לתת המרחב? ג-1 כן. ג-2 לא.

תשובה: נציב את u, v, w כעמודות מטריצה ונפעל פעולות. כשהיא משולשית

$$\text{המטריצה יוצאת} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ ולכן א, ב, ג התשובה לא נכון.}$$

7. נתונה המערכת הבאה. מצא בסיס למרחב הפתרון שלה:

$$\begin{cases} x + y - z + w = -2 \\ 2x + 3y + 5z + 4w = 2 \\ 7x + 10y + 14z + 13w = 4 \\ 5x + 6y + 2z + 7w = -4 \end{cases}$$

ענה על הסעיפים הבאים: האם קבוצות הוקטורים הבאות הן בסיסים ווקטורי הזזה לפתרון?

א. הזזה: $(-8, 6, 0, 0)$. בסיס: $(1, -2, 0, 1)$, $(8, -7, 1, 0)$ א-1 : נכון א-2 :

ב. הזזה: $(-5, 0, 0, 3)$. בסיס: $(-0.5, 1, 0, -0.5)$, $(4.5, 0, 1, -3.5)$ ב-1 : נכון ב-2 : לא נכון:

ג. הזזה: $(-7, 4, 0, 1)$. בסיס: $(9, -9, 1, 1)$, $(7, -5, 1, -1)$ ג-1 : נכון ג-2 : לא נכון:

תשובה: לאחר אפוס כלפי מטה, המטריצה הופכת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ולאחר אפוס כלפי מעלה מקבלים: (-}$$

$8, 6, 0, 0) + w(1, -2, 0, 1) + z(8, -7, 1, 0)$ לכן א נכון. נציב $z=0$ ו- $w=1$ ונקבל את וקטור ההזזה $(-7, 4, 0, 1)$. ע"י $z=w=1$ נקבל וקטור בסיס $(9, -9, 1, 1)$, ועל ידי $z=1-w$ נקבל וקטור בסיס $(7, -5, 1, -1)$ ולכן ג נכון. אם נצור מהמטריצה למעלה I על עמודות 1 ו-4 נקבל את ב ולכן גם ב נכון.

8. נתונה המערכת הבאה התלויה בפרמטר: פתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 3y + bz = 3b \\ 4x + (b + 4)y + 5z = 7b + 1 \\ 7x + (b + 7)y + 8z = 12b \end{cases}$$

א. הערך של b עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות הוא:
א-1 $b=-1.75$. א-2 $b=-1$. א-3 $b=-2$. א-4 $b=5$. א-5 $b=2$.

ב. הערך של b עבורו אין למערכת פתרונות הוא:
 ב-1 $b=-1.75$. ב-2 $b=-1$. ב-3 $b=-2$. ב-4 $b=5$. ב-5 $b=2$.

ג. פתר את המערכת עבור אותו b שיש למערכת אינסוף פתרונות. אז וקטור ההזזה הוא:

ג-1 $(0,0,3)$. ג-2 $(1,1,-2)$. ג-3 $(4,4,0)$. ג-4 $(1,0,1)$.

ד. פתר את המערכת עבור אותו b שיש למערכת אינסוף פתרונות. אז וקטור הבסיס הוא:

ד-1 $(0,0,3)$. ד-2 $(1,1,-2)$. ד-3 $(4,4,0)$. ד-4 $(1,0,1)$.

תשובה: השורה השלישית, באפוס כלפי מטה, יוצאת $3(b+1)(b-2)z=(b-2)(4b+7)$. לכן עבור $b=2$ יש אינסוף פתרונות, ועבור $b=-1$ אין פתרון, והתשובות הן א-5 ו-ב-2. נציב $b=2$ ונפתר את המערכת, ונקבל פתרון $(0,0,3)+z(1,1,-2)$ התשובות הן ג-1 ו-ד-2.

9. במכללה יש 3 פקולטות: מנע"ס, מחשבים ומשפטים. ידוע כי תלמיד מנע"ס צריך שעה הרצאה בשבוע, שעתים תרגול בשבוע ושלוש שעות עבודה מנהלית בשבוע. ידוע כי תלמיד מחשבים צורך בשבוע שתי שעות הרצאה, שעה תרגול ושעה של עבודה מנהלית, וכי תלמיד משפטים צורך בשבוע שעתים הרצאה, שעה תרגול ושעתים של עבודה מנהלית. ידוע כי המכללה הצליחה לשכר

700 שעות הרצאה, 500 שעות תרגול ו-800 שעות עבודה מנהלית בשבוע. מצא כמה תלמידים מכל חוג אפשר לרשום למכללה:

א. תלמידי מנע"ס א-1 100 . א-2 200 . א-3 300 . א-4 50.

ב. תלמידי מחשבים ב-1 100 . ב-2 200 . ב-3 300 . ב-4 50.

ג. תלמידי משפטים ג-1 100 . ג-2 200 . ג-3 300 . ג-4 50.

תשובה: נקבל את המטריצה:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 700 \\ 2 & 1 & 1 & 500 \\ 3 & 1 & 2 & 800 \end{pmatrix}$$
 בסוף האפוס כלפי

מטה נקבל את
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{pmatrix}$$
 והפתרון הוא א-1, ב-1 ו-ג-2.

10. ישנו משק בעל שלש תעשיות תעשייה א, תעשייה ב ותעשייה ג. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשייה א, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 10 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשייה ב, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 10 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשייה ג בשווי של שקל, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 20 אגורות, של תעשייה ב של 20 אגורות ושל תעשייה ג של 30 אגורות. יש השוק החפשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני שח: 150 מיליונים של תעשייה א, 20 מיליונים תעשייה ב, 40 מיליונים – ג. מצא את כמות היצור השנתית של כל תעשייה במליוני שקלים:
 א. כמות תעשייה א. א-1. 50. א-2. 100. א-3. 200. א-4. 250.
 ב. כמות תעשייה ב. ב-1. 50. ב-2. 100. ב-3. 200. ב-4. 250.
 ג. כמות תעשייה ג. ג-1. 50. ג-2. 100. ג-3. 200. ג-4. 250.

תשובה: מטריצת לאונטיף היא:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & 150 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & 20 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & 40 \end{pmatrix}$$

נחליף שורות 1-3, נכפל

ראשונה ושניה ב— 10- ושלישית ב-10. נאפס כלפי מטה ונקבל מטריצה

משולשית: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -400 \\ 0 & -5 & 8 & 300 \\ 0 & 0 & 45 & 4500 \end{pmatrix}$, נמשיך לאפס ונקבל א-3 ב-2

ו-ג-2.

שאלה 11 שאלה מיוחדת

נגדיר טור חזקות (אינסופי) על ידי

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

נניח כי נתון גם $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$ אז הטור $f+g$ מוגדר על ידי

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$

נניח כי נתון סקלר r . אז הטור $rf(x)$ מוגדר על ידי:

$$rf(x) = ra_0 + ra_1x + ra_2x^2 + \dots + ranx^n + \dots$$

שלא ראינו בהרצאה ובתרגול).

א. נביט על הקבוצה החלקית של הטורים f עבורה מתקיים כי $f(2) = 0$. נסמן

קבוצה זו ב- V . האם V תת מרחב? א-1 כן. א-2 לא.

ב. נביט על הקבוצה החלקית של הטורים f עבורה מתקיים כי $f(0) = 2$. נסמן

קבוצה זו ב- W . האם W תת מרחב? ב-1 כן. ב-2 לא.

נביט על שלשת הטורים הבאים:

$$f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots \quad g(x) = 2x + 2x^3 + 2x^5 + \dots + 2x^{2n+1} + \dots$$

$$h(x) = -1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n + \dots$$

פורשים מצא בסיס לתת מרחב זה.

ג. הקבוצה $\{f, g\}$ היא בסיס לתת מרחב זה. ג-1 כן. ג-2 לא.

ד. הקבוצה $\{f, h\}$ היא בסיס לתת מרחב זה. ד-1 כן. ד-2 לא.

ה. הקבוצה $\{h, g\}$ היא בסיס לתת מרחב זה. ה-1 כן. ה-2 לא.

תשובות: א-1, ב-2, ג, ד, ה-1.