

בס"ד יום ה כד שבט התשס"ה 3-2-2005

מבחן אלגברה לינארית למנהל עסקים- מורה: גיורא דולה.

מועד א. המבחן ללא חמר עזר למעט מחשבוניס לא מדעיים. המבחן נמשך שעתיים וחצי. נא לענות את התשובות על טופס השאלון על ידי תשובה סופית קצרה. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תאסף. בהצלחה.

במבחן 15 שאלות שוות משקל של 7 נקודות כל-אחת, סהכ 105 נקודות. כמעט בכל שאלה יש שאלה חלקית נוספת אשר פתרונה מזכה בנקוד חלקי.

1. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 28 \\ 7x + 8y + 8z = 45 \end{cases}$$

רשום את הפתרון הכללי של המערכת. אם אין פתרון כתוב אין פתרון.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת גאוס, כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה  $3 \times 6$  בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה על ידי דטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים שקבלת פעם ממחיקת העמודה והשורה של 6 ופעם של 2. תשובה:

תשובה לשאלה 1

נפתור את המערכת לפי גאוס

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 28 \\ 7 & 8 & 8 & 45 \end{pmatrix}$$

נאפס מתחת ל-1 ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & -13 & -25 \end{pmatrix}$$

נשתמש בשורה השנייה כדי לאפס את -6, ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן,  $z=1, y=2, x=3$  וזהו פתרון יחיד. בקשר לנקוד החלקי, יש לכתוב את המטריצה בעלת שני האפסים. מי שפתר את המערכת לפי שיטת קרמר, הדטרמיננט של המטריצה המקורית הוא כמו הדטרמיננט של המטריצה המשולשית שקבלנו, והוא שווה למכפלת האיברים על האלכסון כלומר  $(-3)(-1)(3)=3$ . מי שחשב את המטריצה ההפוכה, קבל בשלב ראשון את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מי שחשב את ההפוכה על ידי דטרמיננטים, הדטרמיננט המתקבל ממחיקת 6 הוא -6 וזה המתקבל ממחיקת 2 הוא -10

2. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 28 \\ 7x + 8y + 9z = 45 \end{cases}$$

רשום את הפתרון הכללי של המערכת. אם אין פתרון כתוב אין פתרון.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת גאוס, כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.  
תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה  $3 \times 6$  בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x.  
תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה על ידי דטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים שקבלת פעם ממחיקת העמודה והשורה של 6 ופעם של 2.  
תשובה:

תשובה לשאלה 2

נפתור את המערכת לפי גאוס

$$\text{נאפס מתחת ל-1 ונקבל:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 28 \\ 7 & 8 & 9 & 45 \end{pmatrix}$$

נשתמש בשורה השניה כדי לאפס את -6,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & -12 & -25 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן למערכת אין פתרון כלל. בקשר לנקוד החלקי, מי שפתר את המערכת לפי גאוס רושם את המטריצה בעלת שני האפסים. מי שפתר את המערכת לפי שיטת קרמר, הדטרמיננט של המטריצה המקורית הוא כמו הדטרמיננט של המטריצה המשולשית שקבלנו, והוא שווה למכפלת האיברים על האלכסון כלומר  $1(-3)(0)=0$ . מי שחשב את המטריצה ההפוכה, קבל בשלב ראשון את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מי שחשב את ההפוכה על ידי דטרמיננטים, הדטרמיננט המתקבל ממחיקת 6 הוא -6 וזה המתקבל ממחיקת 2 הוא -6.

3. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 28 \\ 7x + 8y + 9z = 46 \end{cases}$$

רשום את הפתרון הכללי של המערכת. אם אין פתרון כתוב אין פתרון.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת גאוס, כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה  $3 \times 6$  בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה על ידי דטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים שקבלת פעם ממחיקת העמודה והשורה של 6 ופעם של 2. תשובה:

תשובה לשאלה 3

נפתור את המערכת לפי גאוס

$$\text{נאפס מתחת ל-1 ונקבל:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 28 \\ 7 & 8 & 9 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\text{נשתמש בשורה השניה כדי לאפס את -6,} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & -12 & -24 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן למערכת אין-סוף פתרונות. נמשיך ונקבל את המטריצה

$$\text{ולכן } x=2+z, y=4-2z \text{ ונקבל את הפתרון הכללי:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+z \\ 4-2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בקשר לנקוד החלקי, מי שפתר את המערכת לפי גאוס רושם את המטריצה בעלת שני האפסים. מי שפתר את המערכת לפי שיטת קרמר, הדטרמיננט של המטריצה המקורית הוא כמו הדטרמיננט של המטריצה המשולשית שקבלנו, והוא שווה למכפלת האיברים על האלכסון כלומר  $1(-3)(0)=0$ . מי שחשב את המטריצה ההפוכה, קבל בשלב ראשון את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מי שחשב את ההפוכה על ידי דטרמיננטים, הדטרמיננט המתקבל ממחיקת 6 הוא -6 וזה המתקבל ממחיקת 2 הוא -6.

4. חשב את הדטרמיננט של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

תשובה: לאחר אפוס העמודה הראשונה המטריצה הופכת ל-

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -24 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ ולכן } \det=24-24=0.$$



5. חשב את ההפוכה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 42 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

שאלה עבור קרדיט חלקי:

א. באם עבדת על ידי שיטת גאוס על מטריצה  $3 \times 6$ , כתוב את המטריצה  $3 \times 6$  שקבלת לאחר שאפסת את שני האיברים מתחת ל-1 בטור הראשון.

ב. באם עבדת בדרך של הדטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים המתקבלים על ידי מחיקת שני האיברים השווים ל-1.

תשובה: במצב שבו אפסנו את הטור מתחת ל-1 המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

זוהי גם התשובה עבור נקוד חלקי.

כעת נשתמש בשורה השלישית כדי ליצור 1- בשורה השנייה על ידי  $S_2 + 3S_3$  ונמשיך לאפס כלפי מטה, ונקבל במצב משלשי את:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -31 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

נמשיך לעבד ונקבל את ההפוכה

$$\begin{pmatrix} 219 & -21 & -71 \\ -21 & 2 & 7 \\ -31 & 3 & 10 \end{pmatrix} .$$

תשובה זו אפשר לבדוק גם על-ידי דרך הדטרמיננטים. הדטרמיננט המתקבל ממחיקת ה-1 העליון הוא 219 וזה המתקבל ממחיקת ה-1 התחתון הוא 71.

6. נתונה קבוצת הוקטורים הבאים.  
 $u=(1,2,3,4), v=(1,-1,1,-1), w=(1,5,5,9)$   
 מצא בסיס לתת המרחב שהם פורשים.

תשובה:

7. המשך לשאלה 6. האם  $v, w$  הם בסיס לתת המרחב הנפרש?

תשובה:

תשובה ל-6 ול-7: נציב את  $u, v, w$  כעמודות מטריצה ונפעל פעולות. כשהיא

משולשית המטריצה יוצאת  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  הזוג  $u, v$  והזוג  $u, w$  הם בסיסים. (מסתבר כי גם  $v, w$  הוא בסיס על ידי זה שנרשום מראש את

8. נתונה המערכת הבאה. מצא בסיס למרחב הפתרון שלה:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 2w = 0 \\ 3x + 5y + 7z + 7w = 0 \end{cases}$$

תשובה:

עבור נקוד חלקי, כתוב את המטריצה אחרי השלב שבו אפסת את העמודה מתחת ל-1.

תשובה:

תשובה: לאחר אפוס כלפי מטה בעמודה הראשונה, המטריצה הופכת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

, וזוהי התשובה לנקוד חלקי. לאחר אפוס כלפי

מעלה מקבלים את:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ולכן  $x=z+6w$ ,  $y=-2z-5w$  ולכן,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+6w \\ -2z-5w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ובכך קבלנו בסיס למרחב הפתרונות.

9. נתונה המערכת הבאה התלויה בפרמטר  $b$ : פתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 4b \\ 2x + by + 9z = 35 \\ 3x + (b+2)y + 14z = 54 \end{cases}$$

מצא את ערכי  $b$  עבורם למערכת: אין פתרון, יש אינסוף פתרונות, יש פתרון יחיד.

עבור נקוד חלקי: אם עבדת בשיטת גאוס, מצא את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננט, מצא את הדטרמיננט של המערכת.

תשובה:

נקבל את שלש המטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 4b \\ 2 & b & 9 & 35 \\ 3 & b+2 & 14 & 54 \end{pmatrix}$$

זוהי התשובה האחת עבור הנקוד

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 4b \\ 0 & b-4 & 9-2b & 35-8b \\ 0 & b-4 & 14-3b & 54-12b \end{pmatrix}$$

החלקי. דטרמיננט המערכת המקורית שווה לדטרמיננט של המטריצה הבאה והוא  $(b-4)(5-b)$  וזוהי התשובה החלקית השניה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 4b \\ 0 & b-4 & 9-2b & 35-8b \\ 0 & 0 & 5-b & 19-4b \end{pmatrix}$$

וברור כי יש בעיות במשוואה האחרונה כאשר  $b=5$ , ואז האבר החפשי הוא -1 כלומר עבור  $b$  זה אין למערכת פתרון. גם כאשר  $b=4$  נופל אבר על האלכסון. אז המשוואות השניה והשלישית הופכות להיות  $z=3$  ולכן המשוואה הראשונה הופכת להיות  $x+2y=4$ , ולכן נקבל:

וזוהי התשובה ל-שאלה 10.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2y \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10. עבור אותו b שלמערכת יש אינסוף פתרונות, מצא את הפתרונות.

11. במכללה יש 3 פקולטות: מנע"ס, מחשבים ומשפטים. ידוע כי תלמיד מנע"ס צריך שעה הרצאה בשבוע, שעתים תרגול בשבוע ושלוש שעות עבודה מנהלית בשבוע. ידוע כי תלמיד מחשבים צורך בשבוע שתי שעות הרצאה, שעה תרגול ושעה של עבודה מנהלית, וכי תלמיד משפטים צורך בשבוע שעתים הרצאה, שעה תרגול ושעתים של עבודה מנהלית. ידוע כי המכללה הצליחה לשכר 500 שעות הרצאה, 400 שעות תרגול ו-600 שעות עבודה מנהלית בשבוע. מצא כמה תלמידים מכל חוג אפשר לרשום למכללה:

תשובה:

תשובה: ההפוכה היא המטריצה:  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ , כפי שאפשר בקלות

לבדוק. נכפל בוקטור  $\begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix}$  ונקבל את הפתרון  $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ .

12. ישנו משק בעל שלש תעשיות תעשייה א, תעשייה ב ותעשייה ג. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשייה א, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 10 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשייה ב, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 10 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשייה ג בשווי של שקל, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 20 אגורות, של תעשייה ב של 20 אגורות ושל תעשייה ג של 30 אגורות. יש השוק החפשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני שח: 10 מליונים של תעשייה א, 80 מליונים תעשייה ב, 180 מליונים – ג. יש למצא את כמות היצור השנתית של כל תעשייה במליוני שקלים:

נסח את המערכת. אין צורך לפתור.

13. פתור את המערכת שבתרגיל הקודם.

תשובה: מטריצת לאונטיף (במליוני שקלים) היא:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & 10 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & 80 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & 180 \end{pmatrix}$$

נחליף שורות 1 ו-3, נכפל

ראשונה ושניה ב-10 ושלישית ב-10. נאפס כלפי מטה ונקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -1800 \\ 0 & -5 & 8 & 1400 \\ 0 & 0 & 45 & 13500 \end{pmatrix}$$

משולשית: , נמשיך לאפס ונקבל

$x=100, y=200, z=300$  במליוני שקלים.

שאלה 14

חקלאי מגדל חיטים ושעורים. גדול כל טון חטה דורש 7 דונם אדמה ו-3 מ"ק מים. גדול כל טון שעורה דורש 8 דונם אדמה ו-2 מ"ק מים. לחקלאי 80 דונם אדמה ו-30 מ"ק מים. עבור כל טון חטה החקלאי מקבל 1000 ₪, ועבור טונה שעורה הוא מקבל 2000 ₪. כמה טונות חטה ושעורה יגדל כדי לקבל רווח מקסימלי?

תשובה: נסמן ב-x את כמות הטונות של חטה שיגדל וב-y את כמות השעורה. המגבלה אודות האדמה היא  $7x+8y \leq 80$ . המגבלה אודות המים היא  $3x+2y \leq 30$ . פונקציית הרווח באלפי שקלים היא  $x+2y$ .

המשך גיאומטרי. הישר  $7x+8y=80$  חותך את הצירים ב- $(80/7,0)$  וב- $(0,10)$ . הישר  $3x+2y=30$  חותך את הצירים בנקודות  $(10,0)$  ו- $(0,15)$ . סה"כ נקבל שני קדקדים:  $(0,10)$  ו- $(10,0)$ . נקודת החתוך לש הישרים היא  $(8,3)$ . לכן יש לנו ארבעה קדקדים:  $(0,0)$ ,  $(10,0)$ ,  $(8,3)$ ,  $(0,10)$  ונציב אותם ב- $x+2y$  ונקבל כי המקסימום הוא ב- $(0,10)$  כלומר עליו לגדל 10 טונות שעורה. ואז ירויה 20 אלפי שקלים.

המשך אלגברי. נסמן ב- $z$  את כמות האדמה וב- $w$  את כמות המים שהחקלאי לא משתמש בהם ונעבר למטריצה:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 8 & 1 & 0 & 80 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נבחר את 2- בשורת פונקצית המטרה,

ונחלק  $30/2=15$ ,  $80/8=10$ . הללו מתאימים לשני הקדקדים  $(0,10)$ ,  $(0,15)$  ורק המינימלי ביניהם הוא בתחום. לכן הפיבוט החדש הוא 8 ונחלק בו את השורה הראשונה ונקבל:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0.875 & 1 & 0.125 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כעת נשתמש בפיבוט לאפס את 2 ו 2- ונקבל:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0.875 & 1 & 0.125 & 0 & 10 \\ 1.25 & 0 & -0.25 & 1 & 10 \\ 0.75 & 0 & 0.25 & 0 & 20 \end{array} \right)$$

נשים לב כי  $y$  הוא 10 וכי  $x$

הוא 0 בקדקד זה, כלומר מצאנו את הקדקד המקסימלי, וכי הרוח הוא 20 (אלפי) שקלים.

## שאלה 15

מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים הצמודים להם של המטריצה:

$$, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

תשובה: עע 4 וע (1,1) עע -1 וע (3,-2) .