מתמטיקה א' - מנהל עסקים

בחינת סוף סמסטר א', מועד א', התשס"ח –25.01.2008

המרצים: בלנוב, דולה, מוזיצ'וק.

משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. אין לפרק את השאלון.
בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תאסף.

בחלק א יש לענות על שמונה מתוך 10 שאלות. בחלק ב יש לענות על 7 מתוך 8 שאלות.
בשאלון שבו נענו יותר שאלות מהדרוש, תיבדקנה רק הראשונות, והשאלות המיותרות לא תיבדקנה.

<u>חלק א'.</u>

הוראות: בשאלות אלו עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק מהן יש אפשרות לתשובה חלקית. בין 10 שאלות יש לבחור 8 בלבד. משקל של כל שאלה 10 נקודות.

1. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 6 \\ 7x_1 - 14x_2 + 5x_3 + 16x_4 = 13 \end{cases}$$

שווה ל:

שאלה עבור ניקוד חלקי:

כתוב את המטריצה בשלב שבו איפסת שלוש מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x_1 .

תשובה:

2. מצא את כל האפשרויות עבור a,b כך שהמטריצות $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$

תקיימנה את השוויון $AB^T = A^T B$

תשובה:

תשובה חלקית: רשום כאן את מערכת המשוואות שצריכה להתקיים**:**

3. הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ שווה ל:

א. 81**.**
ב. 27**.**
ג. 9**.**
ד. 3**.**
ה. 0**.**

4. נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, כתוב את A^{-1} :

תשובה עבור נקוד חלקי:

א. באם עבדת על ידי שיטת גאוס על מטריצה 3x6, כתוב את המטריצה 3x6 שקבלת לאחר שאיפסת את שני האיברים מתחת ל-1 בטור הראשון.

ב. באם עבדת בדרך של המטריצה הצמודה, כתוב את det(A) .

.

5. מצא את כל המטריצות X המקיימות את המשוואה:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה: $X =$

תשובה עבור נקוד חלקי:

כתוב את מערכת המשוואות אשר חיבת להתקיים:

תשובה:

6. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + az = 7 \\ 4x + 9y + a^2 z = 17 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

תשובה:	

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

	תשובה:

עבור נקוד חלקי:
אם עבדת בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננטה, כתוב את הדטרמיננטה של המערכת.

7. מצא את המטריצה A^* אם ידוע ש- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

8. מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y=1-\frac{1-5x}{1+x}$.

9. תהיה $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$ ממ"ל. מצא את x לפי שיטת קרמר.

10. מצא את המקסימום של הפונקציה $3x_1+3x_2+4x_3$ כאשר המשתנים x_1, x_2, x_3 מקיימים את התנאים

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \le 20 \\ x_1+2x_3 \le 6 \\ x_1+2x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

יש לפתור בשיטת הסימפלקס. נא לרשום את המטריצה הסופית המתקבלת!

x_1 :
x_2 :
x_3 :
מקסימום של הפונקציה:

עבור נקוד חלקי: רשום את המטריצה הראשונה שקבלת

המטריצה:

<u>חלק ב'.</u>

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל 3 נקודות.** ענה על שבע שאלות בלבד.

---

11. אם במערכת משוואת מספר הנעלמים שווה למספר המשוואות אז למערכת יש פתרון יחיד.

כן	לא

12. אם A, B מטריצות ריבועיות והפיכות, אז גם $A+B$ מטריצה הפיכה.

כן	לא

13. הפונקציה $y=1+x^3$ היא חד-חד-ערכית

כן	לא

14. הפונקציה $y=\sqrt{2}-\dfrac{1+x}{x}$ היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

15. אם A מטריצה ריבועית מסדר n, שונה מאפס, המקיימת $A^2=2A$ אז בהכרח $A=2I_n$.

לא	כן

16. אם למערכת משוואות ריבועית $AX=b$ אין פתרון, אז הדטרמיננטה של A שווה לאפס.

לא	כן

17. . הפונקציה $y=2^{-x}-2^{x}$ היא פונקציה אי-זוגית.

לא	כן

18. הפונקציה $y=x+|x|$ היא פונקציה מונוטונית יורדת בתחום ההגדרה שלה.

לא	כן

בהצלחה !

תשובות

תשובה מס 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -6 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & -14 & 5 & 16 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-7S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2, S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-2S_2\to S_4]{S_1+S_2\to S_1, S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $x_1=x, x_2=y=s, x_3=z, x_4=w=t$ ונקבל פתרון:

$$x-2y+3w=4,-z+w=3,\rightarrow x=2y-3w+4, z=w-3,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y-3w+4 \\ y \\ w-3 \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.2

$$AB^T=A^TB\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} b & a & ab+1 \\ a & ab+1 & b \\ ab+1 & b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & a+b & 1 \\ a+b & 1 & ab \\ 1 & ab & a+b \end{pmatrix}$$

ולכן: נקבל 3 משואות עם 2 נעלמים:

$$ab=b, a=a+b, ab+1=1$$

שפתרונן b=0. לכן a יכול להיות שרירותי.

3. נחשב את הדטרמיננט על ידי פעולות אלמנטריות אשר שומרות על ערך הדטרמיננט:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_2\to S_3]{S_1+S_2\to S_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+2S_1\to S_4]{-4S_1+S_2\to S_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_4-S_3\to S_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 9 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

וכיון שכל הפעולות שומרים על הדטרמיננט הרי שערך הדטרמיננט של המטריצה המקורית שוה לערך הדטרמיננט של המטריצה האחרונה שהוא 27.

4. נעבד לפי שיטת גאוס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_3\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3+5S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+3S_3\to S_1]{S_2+S_3\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -20 & 15 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

ואכן קל לראות כי $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ היא אכן ההפוכה של A.

.5

$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ לכן נובע כי X היא מטריצה 3x2 שאת איבריה נסמן:

$$\begin{pmatrix}a & d\\ b & e\\ c & f\end{pmatrix}$$

נכפל ונקבל:

$$\begin{pmatrix}a & d\\ b & e\\ c & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & d\\ b & e\\ c & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b & d-e\\ b+c & e+f\\ c & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b-d+e & d-e\\ b+c-e-f & e+f\\ c-f & f\end{pmatrix}$$

כלומר נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים:

$$\begin{pmatrix}a & d\\ b & e\\ c & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b-d+e & d-e\\ b+c-e-f & e+f\\ c-f & f\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=a-b-d+e & d=d-e\\ b=b+c-e-f & e=e+f\\ c=c-f & f=f\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-b-d+e=0 & e=0\\ c-e-f=0 & f=0\\ f=0 & 0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+d=0 & e=0\\ c=0 & f=0\\ f=0 & 0=0\end{cases}\Leftrightarrow b=-d,\ f=0, e=0, c=0$$

$X=\begin{pmatrix}a & d\\ -d & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ לכן התשובה הסופית

.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a & 7 \\ 4 & 9 & a^2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 5 & a^2-4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-5S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & f(a) & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a)=a^2-4-5(a-2)=(a-2)(a+2)-5(a-2)=[a+2-5](a-2)=(a-3)(a-2)$$

לכן כאשר f(a) מתאפס (כלומר a=2,3) יש למערכת אינסוף פתרונות ולכל a אחר יש למערכת פתרון יחיד.

.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

.8

$y=1-\frac{1-5x}{1+x}=\frac{(1+x)-(1-5x)}{1+x}=\frac{6x}{1+x}:R-\{-1\}\ddot{\ }R$. נחשב את ההפוכה ונקבל:

$$y=\frac{6x}{1+x}\to y(1+x)=6x\to y+yx=6x\to y=6x-yx=(6-y)x$$

$$\to x=\frac{y}{6-y}\to f^{-1}(x)=\frac{x}{6-x}:R-\{6\}\to R-\{-1\}$$

.9 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ הדטרמיננטה של הממ"ל שווה ל-

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2)(-a^2-1)-(-a-1)+(1-a)=2a^2+4$$

הדטרמיננטה תמיד שונה מאפס, לכן ניתן להשתמש בשיטת קרמר.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix}}{2a^2+4}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -a \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{2a^2+4}=\frac{-a^2+5-2a}{2a^2+4}$$

.10

.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ -3 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 6/2=3, 20/1=20$$

לכן הרכז הבא הוא בשורה שניה עמודה שלישית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ -3 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+4S_2 \to S_4]{S_1-S_2 \to S_1} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 17 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix} 17/1=17, 30/2=15.$$

לכן הרכז הבא הוא בשורה שלישית עמודה שניה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 17 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 15 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+3S_3 \to S_4]{S_1-S_3 \to S_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 2 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 15 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1.5 & 57 \end{pmatrix}.$$

לכן נקבל ערך מקסימלי כאשר x=0,y=15,z=3 והערך המקסימלי הוא 57.

11. לא למשל למערכת הבאה מספר שוה של נעלמים ומשוואות ואין לה פתרון.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

12. לא למשל I ו—I הן שתיהן הפיכות, וסכומן היא מטריצת ה-0 שאינה הפיכה.

13. כן, $1+x^3=1+y^3 \rightarrow x^3=y^3 \rightarrow x^3-y^3=0 \rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=0$

לסוגרים השניים אין פתרון ולכן x-y=0.

14. כן, כי $y=\sqrt{2}-\frac{1+x}{x}$ אז המנה היא פונקציה רציונלית, והקבוע הוא פולינום ממעלה 0 ולכן פונקציה רציונלית, ולכן סכום פונקציות רציונליות היא פונקציה רציונלית.

15. לא כי עבור $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq 2I$ נובע כי $A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=2A$.

16. כן כי אם הדטרמיננט שונה מ-0 תמיד יש פתרון יחיד.

17. כן כי עבור $y=2^{-x}-2^x$ **נקבל כי** $y(x)=2^{-(-x)}-2^{-x}=2^x-2^{-x}=-(2^{-x}-2^x)$.

18. לא למשל 1<2 ו-f(1)=2<f(2)=4 וזו סתירה לכך שהפונקציה מונוטונית יורדת