

## מתמטיקה א' - מנהל עסקים

בחינת סוף סמסטר א', מועד א', יום ה כה שבט התשס"ו – 23.02.2006

הכתה של גיורא דולה.

משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. אין לפרק את השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון. המחברת משמשת כטייטה בלבד ולא תאסף.

בחלק א יש לענות על שמונה מתוך 10 שאלות. בחלק ב יש לענות על 7 מתוך 8 שאלות. בשאלון שבו נענו יותר שאלות מהדרוש, תבדקנה רק הראשונות, והשאלות המיותרות לא תבדקנה.

### חלק א'

הוראות: בשאלות אלו עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק מהן יש אפשרות לתשובה חלקית. בין 10 שאלות יש לבחור 8 בלבד. משקל של כל שאלה 10 נקודות.

1. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10 \\ 11x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 29x_4 = 35 \end{cases}$$

שווה ל:

**שאלה עבור ניקוד חלקי:**

כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה- $x_1$ .

תשובה:

תשובה לשאלה 1 נביט בפתרון מטריציאלי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 17 & 23 & 29 & 35 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 - 6S_1 \rightarrow S_2, S_3 - 11S_1 \rightarrow S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_2 \rightarrow S_3, S_2 / -5 \rightarrow S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 - 2S_2 \rightarrow S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הוא  $x_3=s, x_4=t, x_2=4-2s-3t, x_1=-1+s+t$

2. מצא את כל האפשרויות עבור a ו-b כך שהמטריצות

$$A^T B = B^T A \quad \text{תקימנה את השויון} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & a \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה:

תשובה חלקית: רשום כאן את מערכת המשוואות שצריכה להתקיים:

תשובה לשאלה 2:

נבצע את הכפל ונקבל:

$$A^T B = \begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ -a-b+1 & b-a-1 & b-a-1 \\ a+b-1 & a-b+1 & a-b+1 \end{pmatrix}, B^T A = (A^T B)^T = \begin{pmatrix} ab+2 & -a-b+1 & a+b-1 \\ a+b+1 & b-a-1 & a-b+1 \\ a+b+1 & b-a-1 & a-b+1 \end{pmatrix}$$

המערכת היא של 3 משוואות עם 2 נעלמים. בין השאר מתקבלת המשוואה  $a+b-1 = a+b+1$  אשר אין לה פתרון, ולכן אין שום ערך של  $a$  ושל  $b$  שעבורו יתקיים פתרון.

3. הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$$

שווה ל:

תשובה:..

תשובה מלאה: הדטרמיננט הוא 0.

תשובה חלקית: אם פתרת את התרגיל בפתוח לפי שורה, כתוב את המינור שמתקבל ממחיקת השורה והעמודה הראשונות.

אם פתרת לפי פעולות אלמנטריות, כתוב את המטריצה שבה יש עמודה של המטריצה I.

נאפס מתחת לאיבר בשורה הראשונה ובעמודה הראשונה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 40 & 60 & 80 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2 - 5s_1 \rightarrow s_2, s_3 - s_1 \rightarrow s_3, s_4 - 19s_1 \rightarrow s_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_2 / -4 \rightarrow s_2} -4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3 - s_2 \rightarrow s_3} -4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ולכן  $\det=0$ .

המטריצה השנייה למעלה היא תשובה חלקית ראשונה.

נחשב את המינור

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3 / 20 \rightarrow s_3} 20 \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_2 - s_3 \rightarrow s_2} 20 \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1 - 6s_2 \rightarrow s_1, s_3 - 2s_2 \rightarrow s_3} 20 \begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_1 / -5 \rightarrow s_1} -100 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1 + s_2 \rightarrow s_3} -100 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן ערך המינור הוא 0.

4. נתונה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 16 & 26 \end{pmatrix}$ , כתוב את  $A^{-1}$ :

תשובה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 16 & 26 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2 - s_1 \rightarrow s_2, s_3 - 7s_1 \rightarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_3 - 2s_2 \rightarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1 - 3s_3 \rightarrow s_1, s_2 - 2s_3 \rightarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 16 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_1 - 2s_2 \rightarrow s_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 9 & 5 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן קל לבדוק כי זו  $A^{-1}$ .

המטריצה הראשונה בשרשרת היא התשובה החלקית הראשונה. כל הפעולות האלמנטריות שומרות דטרמיננט, ולכן מהמטריצה הרביעית רואים כי הדטרמיננט של המטריצה המקורית הוא 1.

תשובה עבור נקוד חלקי:

א. באם עבדת על ידי שיטת גאוס על מטריצה  $3 \times 6$ , כתוב את המטריצה  $3 \times 6$  שקבלת לאחר שאפסת את שני האיברים מתחת ל-1 בטור הראשון.

ב. באם עבדת בדרך של המטריצה הצמודה, כתוב את  $\det(A)$ .

5. מצא את כל המטריצות  $X$  מגודל  $2 \times 3$  המקיימות את המשוואה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

תשובה:

$X =$

תשובה עבור נקוד חלקי:

כתוב את מערכת המשוואות אשר חיבת להתקיים:

תשובה:

פתרון:

נציב  $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$  נבצע את הכפל ונקבל שוויון בין מטריצות:

$$\begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+4b & 3a+5b+6c \\ d & 2d+4e & 3d+5e+6f \end{pmatrix}$$

וכעת נשווה בין המטריצות ונקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים:

$$\begin{cases} a+2d = a \\ 3d = d \\ b+2e = 2a+4b \end{cases}, \begin{cases} 3e = 2d+4e \\ c+2f = 3a+5b+6c \\ 3f = 3d+5e+6f \end{cases}$$

מתוך המשוואה השנייה נובע כי  $d=0$  . נציב במשוואה הרביעית ונקבל כי  $e=0$  . נציב במשוואה השישית ונקבל כי  $f=0$  . נותרו משוואות 1,3,5 מהן הראשונה הפכה טריביאלית. המשוואה השלישית הפכה להיות  $2a+3b=0$  והחמישית ל- $3a+5b+5c=0$  . לכן  $a=-3b/2, c=-b/10$  ואכן המטריצות מהצורה

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b/2 & b & -b/10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{b}{10} \begin{pmatrix} -15 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הן הרצויות.

6. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + 2y + az = 2a \\ 4x + (a + 2)y + 6z = 15 \\ 6x + 9y + 4az = 6a + 9 \end{cases}$$

כאשר  $a$  הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של  $a$  יש למערכת פתרון יחיד ?

	<b>תשובה:</b>
--	---------------

ב. עבור איזה ערכים של  $a$  למערכת אין שום פתרון ?

	<b>תשובה:</b>
--	---------------

ג. עבור איזה ערכים של  $a$  למערכת יש אינסוף פתרונות ?

	<b>תשובה:</b>
--	---------------

**עבור נקוד חלקי:**

אם עבדת בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננטה, כתוב את הדטרמיננטה של המערכת.

--

פתרון נפתר בשיטת גאוס ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2a \\ 4 & a+2 & 6 & 15 \\ 6 & 9 & 4a & 6a+9 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2-4s_1 \rightarrow s_2, s_3-6s_1 \rightarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2a \\ 0 & a-6 & 6-4a & 15-8a \\ 0 & -3 & -2a & 9-6a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(a-6)s_3+3s_2 \rightarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2a \\ 0 & a-6 & 6-4a & 15-8a \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix}, n=3(6-4a)-2a(a-6)=$$

$$=-2a^2+12a-12a+18=-2(a^2-9), m=3(15-8a)+(a-6)(9-6a)=$$

$$=45-24a+9a-6a^2-54+36a=-6a^2+21a-9=-3(2a^2-7a+3)=$$

$$=-3(2a-1)(a-3)$$

|

נשים לב כי יש 4 ערכים חשובים  $a=0.5, 3, -3, 6$   
 כאשר  $a=3$  נקבל כי  $m=n=0$  ולכן יש אינסוף פתרונות.  
 כאשר  $a=-3$  נקבל כי  $m=0 \square n$  ולכן אין פתרון.  
 כאשר  $a=0.5$  נקבל כי  $n=0 \square m$  ולכן יש פתרון יחיד.  
 כאשר  $a=6$  נקבל כי השורה השנייה מכילה רק את  $Z$  והשלישית את  $Y, Z$  ולכן יש פתרון יחיד.  
 ולכן אינסוף פתרונות עבור  $a=3$  ואף פתרון עבור  $a=-3$  ולכל  $a$  אחר יש פתרון יחיד.  
 אם עובדים לפי דטרמיננט מקבלים  $\det=-2(a^2-9)$  וממשיכים כרגיל.

7. מצא את הפונקציה ההפוכה (כולל תחום וטוח) לפונקציה  $y = \frac{3x+1}{3x-1}$

פתרון: נביט במשוואות:

$$(3x-1)y = 3x+1 \rightarrow 3xy - y = 3x+1 \rightarrow$$

$$3xy - 3x = y+1 \rightarrow 3x(y-1) = y+1 \rightarrow$$

מהצורה

$$x = \frac{y+1}{3(y-1)} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3(x-1)} : R - \{1\} \rightarrow R - \{1/3\}$$



8. ישנו משק בעל שלש תעשיות תעשיה א, תעשיה ב ותעשיה ג. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשיה א, מחייב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 30 אגורות, של תעשיה ב בערך של 10 אגורות ושל תעשיה ג בערך של 20 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשיה ב, מחייב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 10 אגורות, של תעשיה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשיה ג בערך של 20 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשיה ג בשווי של שקל, מחייב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 20 אגורות, של תעשיה ב של 10 אגורות ושל תעשיה ג של 10 אגורות.

יש השוק החופשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני ש"ח: 10 מיליונים של תעשיה א, 130 מיליונים תעשיה ב, 120 מיליונים –ג. מצא את כמות היצור השנתית של כל תעשיה במליוני שקלים:

נסח את המערכת (אין צורך לפתור).

תשובה:

$$\begin{cases} x = 0.3x + 0.1y + 0.2z + 100 \\ y = 0.1x + 0.2y + 0.1z + 1300 \\ z = 0.2x + 0.2y + 0.1z + 1200 \end{cases}$$

9. מצא את הקף הייצור של התעשיות בשאלה הקודמת.

תשובה

$$\begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -0.2 & 10 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 & 130 \\ -0.2 & -0.2 & 0.9 & 120 \end{pmatrix} \xrightarrow{10S_2 \rightarrow S_1, 10S_3 \rightarrow S_3, 10S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 & 1300 \\ 7 & -1 & -2 & 100 \\ -2 & -2 & 9 & 1200 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 + 7S_1 \rightarrow S_2, S_3 + 2S_1 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 & 1300 \\ 0 & 55 & -9 & 9200 \\ 0 & -18 & 11 & -1400 \end{pmatrix} \xrightarrow{3S_2 + S_2 \rightarrow S_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 & 1300 \\ 0 & 1 & 24 & 5000 \\ 0 & -18 & 11 & -1400 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 + 18S_2 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 & 1300 \\ 0 & 1 & 24 & 5000 \\ 0 & 0 & 443 & 88600 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3 / 443 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 & 1300 \\ 0 & 1 & 24 & 5000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 - 24S_3 \rightarrow S_2, S_1 + S_3 \rightarrow S_1} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1 - 8S_2 \rightarrow S_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{pmatrix}$$

ולכן  $x=100, y=z=200$ .

10. חקלאי מגדל חיטים ושעורים. גדול כל טון חטה דורש דונם אדמה ו-8 מ"ק מים. גדול כל טון שעורה דורש 4 דונם אדמה ו-72 מ"ק מים. לחקלאי 40 דונם אדמה ו-72 מ"ק מים. עבור כל טון חטה החקלאי מקבל 1000 ש"ח, ועבור טונה שעורה הוא מקבל 2000 ש"ח. כמה טונות חטה ושעורה יגדל כדי לקבל רווח מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

**עבור נקוד חלקי:**

כתוב את הקדקדים של התחום האפשרי.

תשובה: מגבלת האדמה היא  $x + 4y \leq 40$  ומגבלת המים היא  $8x + y \leq 72$ . הישר המתאים למגבלה הראשונה חותך את הצירים בנקודות  $(0,10)$ ,  $(40,0)$  והשני בנקודות  $(0,72)$ ,  $(9,0)$ . נקודת החיתוך המשותפת היא  $(8,8)$ . לכן קדקדי הסימפלקס הם

(0,0),(0,10),(9,0),(8,8) ועליהם יש להפעיל את פונקצית התועלת  $x+2y$  אשר מודדת את הרווח באלפי שקלים. הרווח המקסימלי יוצא 24000 נח בקדקד (8,8).

### חלק ב'!

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל 3 נקודות. ענה על שבע שאלות בלבד.

11. אם  $v$  הוא פתרון של מערכת המשוואות  $AX = b, b \neq 0$  ו- $w$  הוא פתרון של מערכת המשוואות  $AX = 0$ , אז  $w-v$  הוא פתרון של מערכת המשוואות  $AX = b$ .

כן	לא

תשובה: לא  $A(w-v) = Aw - Av = 0 - b = -b \neq b$

12. אם  $A, B$  מטריצות הפיכות, אז גם  $B - A$  מטריצה הפיכה.

כן	לא

תשובה: לא. אם  $A=B=I$  אז  $A-B=0$  הפיכות אבל 0 לא הפיכה.

13. הפונקציה  $y = x^3 - x$  היא חד-חד-ערכית

כן	לא

תשובה: לא.  $y(0) = y(1) = 0$  ולכן  $y$  לא חז"ע.

14. הפונקציה  $y = \frac{|x|^2}{|x|^2 + 1}$  היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

תשובה: כן.  $y = \frac{|x|^2}{|x|^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  וזו פונקציה רציונלית..

15. ישנן שתי מטריצות  $A \neq \pm B$  המקיימות  $A^2 = B^2$ .

כן	לא

תשובה: כן  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  הן בעלות רבועים שווים.

16. אם במערכת משוואות  $AX = b$  מספר המשוואות גדול ממספר הנעלמים, אז למערכת יש פתרון אחד בדיוק.

כן	לא

תשובה: לא. יתכן שלמערכת אין כלל פתרון.

17. לכל מטריצה  $A$  מסדר  $3 \times 3$  מתקיים  $\det(2A) = 8\det(A)$ .

כן	לא

תשובה: כן כל שורה של  $A$  נכפלת ב-2, אז הדטרמיננט נכפל ב- $2^3=8$ .

18. למערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 7x_1 + 15x_2 + 22x_3 = -1 \\ 8x_1 + 17x_2 + 26x_3 = 1 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד.

כן	לא

תשובה: כן כי הדטרמיננט של מטריצת המקדמים שווה ל-1 ושונה מ-0.

**בהצלחה !**