

בס"ד יום ב ו אב התשס"ג 4-8-2003

מבחן אלגברה לינארית למנהל עסקים- מורה: גיורא דולה.

מועד ב. המבחן ללא חמר עזר למעט מחשבוני לא מדעיים. המבחן נמשך שעתיים וחצי. נא לענות את התשובות על טופס השאלון על ידי הקפת האפשרות הנכונה. המחברת משמשת כטיטה בלבד ולא תאסף. בהצלחה.

כל סעיף שבו יש להקיף את האפשרות הנכונה שוה ערך לכל סעיף אחר כזה. כלומר אם למשל ישנה שאלה שבה יש שני סעיפים ושאלה אחרת שבה יש ארבעה סעיפים, המשקל הכולל של השאלה השניה הוא פי שנים מאשר השאלה הראשונה. במבחן יש 39 סעיפים כאלו ב-11 שאלות. שאלות 1-10 הן אודות חומר שהיה בהרצאה, שאלה 11 היא אודות חומר חדש.

בחלק מהשאלות יש סעיף שנועד לתת אפשרות לענות תשובה נכונה בלי לעשות את כל החשבונינעס אלא רק את חלקם. בשאלונים של שנה שעברה הוא ניכר על ידי המלים 'המטריצה כשהיא משלשית'. גם השנה יש כאלו סעיפים עם המלים: 'כאשר המטריצה משולשית'. כיון שניתן לעשות את האלימינציה של גאוס בכמה אפשרויות, מודגש בזאת כי הכונה בסעיף המשולשית לסדר הבא: משמאל לימין ומלמעלה למטה בלבד, בלי החלפת שורות ובלי חלוקת אף שורה בקבוע. שלא כמו שנה שעברה-סעיף זה הוא חובה. כל סעיף שבו לא נמצאת התשובה הנכונה בשאלון, יזכה את כל הכתה במלא הנקודות, בלי קשר לתשובה שסומנה.

1. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-z שוה ל-

$$1\text{-א} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} 2\text{-א} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} 3\text{-א} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} 4\text{-א} \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

ב-מספר פתרונות המערכת הוא ב-1 אין פתרון ב-2 פתרון יחיד. ב-3 אינסוף פתרונות.

תשובה: המטריצה המשולשית היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} . \text{לכן התשובות הן א-3 ו-ב-2.}$$

2. הבט במערכת הבאה ופתר אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 4x - 5y + 3z = 9 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-איברים החפשיים b שווה ל-

$$1\text{-א} \begin{Bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{Bmatrix} 2\text{-א} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} 3\text{-א} \begin{Bmatrix} 4 \\ -9 \\ 0 \end{Bmatrix} 4\text{-א} \begin{Bmatrix} 13 \\ -9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ב. הבט בפתרון כאשר $x=1$. אז y שווה ל- . ב-1 $y=2$. ב-2 $y=3$. ב-3 $y=4$. ב-4 אין בכלל פתרון כזה.

ג. הבט בפתרון כאשר $x=1$. אז z שווה ל- . ג-1 $z=6$. ג-2 $z=5$. ג-3 $z=4$. ג-4 אין בכלל פתרון כזה.

ד. וקטור הזזה לפתרון כללי הוא: ד-1 $(4,7,-1)$. ד-2 $(-2,-1,1)$. ד-3 $(3,3,0)$. ד-4 $(11,7,0)$.

ה. וקטור בסיס למרחב הפתרון הוא: ה-1 $(1,2,1)$. ה-2 $(-2,-1,1)$. ה-3 $(-2,1,1)$. ה-4 $(-1,2,1)$.

תשובה: כאשר המטריצה משולשית, המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן התשובה ל-א היא א-1. נציב $x=1$ ונקבל

שתי משוואות עם שני נעלמים, $z-y=3, z+y=7$, ונובע כי $z=5, y=2$, ולכן נובע כי התשובות הן ב-1 ו-ג-2. הפתרון יוצא $x=11-2z, y=7-z$. לכן התשובות הן ד-4 ו-ה-2.

3. הבט במערכת הבאה ופתר אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 11 \\ 5x - 6y + 7z = 17 \end{cases}$$

א. בשלב שהמטריצה משלשית: עמודת ה-איברים החפשיים b שווה ל-

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & 4\text{-א} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & 3\text{-א} & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 2\text{-א} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1\text{-א} \end{matrix}$$

ב. הבט בפתרון כאשר $x=1$. אז y שווה ל- . ב-1 $y=-1$. ב-2 $y=-2$. ב-3 $y=-3$. אין בכלל פתרון כזה.

ג. הבט בפתרון כאשר $x=1$. אז z שווה ל- . ג-1 $z=0$. ג-2 $z=1$. ג-3 $z=2$. אין בכלל פתרון כזה.

ד. וקטור ההזזה הוא ד-1 $(1, -2, 0)$. ד-2 $(-2, 1, 0)$. ד-3 $(4, 4, 3)$. ד-4 $(2, 16, 3)$

ה. בסיס למרחב הפתרון הוא: ה-1 $(2, -1, 0)$. ה-2 $(-2, -1, 1)$. ה-3 $(-1, -1, -9)$. ה-4 $(1, 2, 1)$.

תשובה: בשלב שהמטריצה משולשית היא בצורה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן התשובות הן: א-3 . נקבל $x=1+z$, $y=2z-2$.

לכן $(x,y,z)=(1,-2,0)+z(1,2,1)$ והתשובות הן ד-1 ו-ה-3 . נציב $x=1$ אז $y=-2, z=0$ והתשובות הן ב-2 ג-1 .

4. חשב את הדטרמיננט של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננט שוה: א. $\det=-1$. ב. $\det=1$. ג. $\det=6$. ד. $\det=-6$

תשובה: לאחר אפוס העמודה הראשונה המטריצה הופכת ל-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

, ולכן $\det=20-21=-1$ והתשובה היא א.

5. חשב את ההפוכה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 13 \\ 5 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

א. במטריצה המשלשית: העמודה השלישית עמודת ה z שווה ל-

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 4-א} \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 3-א} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{Bmatrix} \text{ 2-א} \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 1-א}$$

ב. במטריצה המשלשית: העמודה הרביעית (עמודת ה x של המטריצה ההפוכה) שווה ל-

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 4-ב} \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 3-ב} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{Bmatrix} \text{ 2-ב} \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 1-ב}$$

ג. הבט במטריצה ההפוכה. אז האלכסון הראשי שווה ל-

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 4-ג} \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 3-ג} \quad \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 2-ג} \quad \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 1-ג}$$

ד. הבט במטריצה ההפוכה. אז האלכסון המשני שווה ל-

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{Bmatrix} \text{ 4-ד} \quad \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{Bmatrix} \text{ 3-ד} \quad \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 2-ד} \quad \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ 1-ד}$$

תשובה: במצב משלשי, המטריצה היא:

ולכן התשובה א-3 וב-4. נמשיך לעבד

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל את ההפוכה

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן התשובות הן ג-3 ו-ד-4.

6. נתונה קבוצת הוקטורים הבאים.

$$u=(1,1,-1,1), v=(1,2,3,4), w=(3,3,-3,4)$$

מצא בסיס לתת המרחב שהם פורשים, וענה על השאלות הבאות.

א. האם הקבוצה V, U היא בסיס לתת המרחב? א-1 כן. א-2 לא.

ב. האם הקבוצה W, U היא בסיס לתת המרחב? ב-1 כן. ב-2 לא.

ג. האם הקבוצה W, V היא בסיס לתת המרחב? ג-1 כן. ג-2 לא.

תשובה: נציב את u, v, w כעמודות מטריצה ונפעל פעולות. כשהיא משולשית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה יוצאת ולכן א, ב, ג התשובה לא נכון.

7. נתונה המערכת הבאה. מצא בסיס למרחב הפתרון שלה:

$$\begin{cases} x + y + z - w = -2 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 3 \\ 7x + 10y + 13z + 14w = 7 \\ 5x + 6y + 7z + 2w = -3 \end{cases}$$

ענה על הסעיפים הבאים: האם קבוצות הוקטורים הבאות הן בסיסים ווקטוריים הזזה לפתרון?

א. הזזה: $(-9,7,0,0)$. בסיס: $(1,-2,1,0)$, $(8,-7,0,1)$ א-1 : נכון א-2 : לא נכון:

ב. הזזה: $(-5,0,3,0)$. בסיס: $(10,-6,2,1)$, $(9,-9,1,1)$ ב-1 : נכון ב-2 : לא נכון:

ג. הזזה: $(-7,4,1,0)$. בסיס: $(9,-9,1,1)$, $(11,-9,3,1)$ ג-1 : נכון ג-2 : לא נכון:

תשובה: לאחר אפוס כלפי מטה, המטריצה הופכת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

ולאחר אפוס כלפי מעלה מקבלים: (-

נקבל $z=w=1$ ע"י $z(1,-2,1,0)+w(8,-7,0,1)+9,7,0,0$. לכן א נכון. ע"י $z=2$ $w=1$ נקבל וקטור בסיס $(9,-9,1,1)$, על ידי $z=3$ $w=1$ נקבל וקטור בסיס $(11,-13,3,1)$ ולכן ב ו-ג לא נכונים.

8. נתונה המערכת הבאה התלויה בפרמטר: פתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 4b \\ 2x + by + 10z = 7b + 19 \\ 3x + (b-1)y + 15z = 2b + 22 \end{cases}$$

א. הערך של b עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות הוא:
א-1 $b=-1.75$. א-2 $b=-1$. א-3 $b=-2$. א-4 $b=5$. א-5 $b=2$.

ב. הערך של b עבורו אין למערכת פתרונות הוא:
ב-1 $b=-1.75$. ב-2 $b=-1$. ב-3 $b=-2$. ב-4 $b=5$. ב-5 $b=2$.

ג. פתר את המערכת עבור אותו b שיש למערכת אינסוף פתרונות. אז וקטור ההזזה הוא:

ג-1 $(0,0,3)$. ג-2 $(1,1,-2)$. ג-3 $(4,-4,0)$. ג-4 $(-8,14,0)$.

ד. פתר את המערכת עבור אותו b שיש למערכת אינסוף פתרונות. אז וקטור הבסיס הוא:

$$1-ד \quad (-5,0,1) \quad 2-ד \quad (1,1,-2) \quad 3-ד \quad (4,-4,0) \quad 4-ד \quad (1,0,1)$$

תשובה: השורה השלישית, באפוס כלפי מטה, יוצאת $(b-5)(b+2)z=9(b+1)(b-5)$. לכן עבור $b=5$ יש אינסוף פתרונות, ועבור $b=-2$ אין פתרון, והתשובות הן א-4 ו-ב-3. נציב $b=5$ ונפתר את המערכת, ונקבל פתרון $(-8,14,0)+z(-1,0,1)$ התשובות הן ג-4 ו-ד-1.

9. במכללה יש 3 פקולטות: מנע"ס, מחשבים ומשפטים. ידוע כי תלמיד מנע"ס צריך שעה הרצאה בשבוע, שעתים תרגול בשבוע ושלוש שעות עבודה מנהלית בשבוע. ידוע כי תלמיד מחשבים צורך בשבוע שתי שעות הרצאה, שעה תרגול ושעה של עבודה מנהלית, וכי תלמיד משפטים צורך בשבוע שעתים הרצאה, שעה תרגול ושעתים של עבודה מנהלית. ידוע כי המכללה הצליחה לשכר

500 שעות הרצאה, 400 שעות תרגול ו-600 שעות עבודה מנהלית בשבוע. מצא כמה תלמידים מכל חוג אפשר לרשום למכללה:
א. תלמידי מנע"ס א-100 א-200 א-300 א-450.

ב. תלמידי מחשבים ב-100 ב-200 ב-300 ב-450.
ג. תלמידי משפטים ג-100 ג-200 ג-300 ג-450.

תשובה: נקבל את המטריצה:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 500 \\ 2 & 1 & 1 & 400 \\ 3 & 1 & 2 & 600 \end{pmatrix}$$
 בסוף האפוס כלפי מטה

נקבל את
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix}$$
 והפתרון הוא א-1, ב-1 ו-ג-1.

10. ישנו משק בעל שלוש תעשיות תעשייה א, תעשייה ב ותעשייה ג. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשייה א, מחייב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג

בערך של 10 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשייה ב, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 10 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשייה ג בשווי של שקל, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 20 אגורות, של תעשייה ב של 20 אגורות ושל תעשייה ג של 30 אגורות. יש השוק החפשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני שח: 50 מיליונים של תעשייה א, 120 מיליונים תעשייה ב, 40 מיליונים –ג. מצא את כמות היצור השנתית של כל תעשייה במליוני שקלים:

א. כמות תעשייה א. א-1 50. א-2 100. א-3 200. א-4 250.
 ב. כמות תעשייה ב. ב-1 50. ב-2 100. ב-3 200. ב-4 250.
 ג. כמות תעשייה ג. ג-1 50. ג-2 100. ג-3 200. ג-4 250.

תשובה: מטריצת לאונטיף היא:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & 50 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & 120 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & 40 \end{pmatrix}$$

נחליף שורות 1-3, נכפל

ראשונה ושניה ב— 10- ושלישית ב-10. נאפס כלפי מטה ונקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -400 \\ 0 & -5 & 8 & -200 \\ 0 & 0 & 45 & 4500 \end{pmatrix}$$

משולשית: , נמשיך לאפס ונקבל א-2 ב-3

ו-ג-2.

שאלה 11 שאלה מיוחדת

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

נתונה מטריצה ונתון כי למערכת $Av=0$ יש

אינסוף פתרונות. ענה על השאלות הבאות כל ידי הקפת התשובה הנכונה.

- א- A הפיכה. נכון-לא נכון.
- ב- $\det A=0$. נכון-לא נכון.
- ג- הוקטורים $(a,d,g), (b,e,h), (c,f,i)$ בלתי תלויים לינארית. נכון-לא נכון.
- ד. נתון וקטור $b \neq 0$ כך שלמערכת $Av=b$ יש פתרון אחד לפחות. אז למערכת יש אינסוף פתרונות. נכון-לא נכון.