מתמטיקה א' - מנהל עסקים

בחינת סוף סמסטר א', מועד ב', יום ה א ניסן התשס"ו –30.03.2006

מרצה: ד"ר גיורא דולה.

משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. אין לפרק את השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תיאסף.

בחלק א יש לענות על שבע מתוך תשע שאלות. בחלק ב יש לענות על כל 10 השאלות.
בשאלון שבו נענו יותר שאלות מהדרוש, תיבדקנה רק הראשונות, והשאלות המיותרות לא תיבדקנה.

1. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$$

שווה ל:

שאלה עבור ניקוד חלקי:

כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x_1 .

תשובה:

2. מצא את כל המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ המקימות את השוויון $A^2 = 2A - I_3$

תשובה:

תשובה עבור נקוד חלקי: כתוב את כל המשוואות אשר חיבות להתקים:

3. הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ שווה ל:

א. 8**.**
ב. -8**.**
ג. 16**.**
ד. -16**.**
ה. 0**.**

4. נתונה $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, חשב את A^{-1} :

תשובה:

.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

א. באם עבדת על ידי שיטת גאוס על מטריצה 3x6, כתוב את המטריצה 3x6 שקבלת לאחר שאפסת את שני האיברים בטור הראשון.

ב. באם עבדת בדרך של המטריצה הצמודה, כתוב את השורה הראשונה שלה.

.

5. מצא את כל המטריצות X מגודל 2×3 המקיימות את המשוואה

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה:

$X =$

תשובה עבור נקוד חלקי: כתוב את כל המשוואות אשר חיבות להתקים:

6. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ (a+1)x+2y+(a+1)z=2 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור אילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור אילו ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

תשובה:	

ג. עבור אילו ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

תשובה:	

עבור נקוד חלקי:

אם עבדת בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננטה, כתוב את הדטרמיננטה של המערכת.

7. מצא את הפונקציה ההפוכה (כולל תחום וטוח) לפונקציה $y=\frac{1}{2}-\frac{-x-1}{2x+1}$

8. ישנו משק בעל שלוש תעשיות תעשיה א, תעשיה ב ותעשיה ג.
ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשיה א, מחייב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 10 אגורות, של תעשיה ב בערך של 10 אגורות ושל תעשיה ג בערך של 20 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשיה ב, מחייב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 20 אגורות, של תעשיה ב בערך של 20 אגורות ושל תעשיה ג בערך של 20 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשיה ג בשווי של שקל, מחייב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 10 אגורות, של תעשיה ב של 10 אגורות ושל תעשיה ג של 30 אגורות.
יש השוק החופשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במיליוני ש"ח:
5 מיליונים של תעשיה א, 40 מיליונים תעשיה ב, 90 מיליונים –ג. מצא את כמות היצור השנתית של כל תעשיה במיליוני שקלים:

נסח את המערכת (אין צורך לפתור).

9. הוקטור $\bar{x} = (x, y, z, w)$ הנו פתרון של המערכת $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כאשר a

פרמטר ממשי. מצא את a אם ידוע ש- $x = 2$.

פתרונות לשאלות של חלק א

שאלה 1.

נעבד בצורה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-S_3\to S_2]{S_1+2S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1-3S_2\to S_1]{S_2/-4\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל: $x_4=-1, x_3=0, x_1+2X_2=-1$.

שאלה 2

$2A-I=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b+ac \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן על ידי השואת המקדמים נובעת משואה יחידה: $ac=0$ ופתרונה $a=0$ או $c=0$. לכן הפתרונות הן כל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ או מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 3

נחשב את הדטרמיננט על ידי פעולות אלמנטריות על שורות המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-S_1\to S_4]{S_2-S_1\to S_2,S_3-S_1\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-S_2\to S_4]{S_2\leftrightarrow S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4-S_3\to S_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננט של המטריצה האחרונה הוא 16 , ושל המקורית הוא 16- כיון שבוצעה פעולת חלוף שורות.

שאלה 4.

נבצע פעולות אלמנטריות על מטריצה 3x6. פעולה אחת נבזבז כדי ליצור מקדם 1 בפינה השמאלית העליונה.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2\to S_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_2\to S_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+7S_3\to S_2]{S_1-4S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-S_2\to S_2]{S_1-S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן זו ההפכית כפי שקל לראות.

שאלה 5.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d-a & 2e-b & 2f-c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2d-a & 2e-b & 2f-c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2d & 2e+a & 2f+b \\ 0 & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נפתר ונקבל $d=e=a=1, b+2f=3$ ולכן כל המטריצות הן מהצורה

$\begin{pmatrix} 1 & 3-2f & c \\ & 1 & 1 & f \end{pmatrix}$ כפי שקל לראות.

שאלה 6.

נעבד לפי מטריצות. נשנה קצת את המדיניות הרגילה כדי שיהיו כמה שפחות מופעים של a .

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & a+1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_1\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3\leftrightarrow S_2]{S_1\leftrightarrow S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, כשהזזנו את הa- להופיע כמה שיותר למטה ויותר ימינה, נאפס לפי תהליך גאוס רגיל ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-aS_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & 1-2a & 1-a & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+S_3\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & -2a & 0 & -2a \end{pmatrix}$$

כעת נעשה עוד טריק שיחסוך עבודה. נשנה את השמות של y ושל z והפעולה שקולה להחלפת העמודות השניה והשלישית ונקבל:

כעת המטריצה משולשית עליונה. $\begin{pmatrix} & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2a & -2a \end{pmatrix}$ רק אם a=0,1 נקבל אפסים על האלכסון. בכל מקרה אחר יש פתרון יחיד כיון שיש מטריצה משולשית עם אלכסון שונ מ-0.

כאשר נציב a=0,1 בכל מקרה נקבל ∞ פתרונות.

שאלה 7.

$$y=\frac{1}{2}-\frac{-x-1}{2x+1}=\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2x+1+2(x+1)}{2(2x+1)}=$$
$$\frac{4x+3}{4x+2}\to y(4x+2)=4x+3\to 4xy+2y=4x+3$$
$$\to 4x(y-1)=3-2y\to x=\frac{3-2y}{4(y-1)}$$

ולכן, $y=\frac{3-2x}{4(x-1)}:R-\{1\}\to R-\{-0.5\}$

שאלה 8.

$$[I-\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix}$$

שאלה 9.

$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. שוב, כבשאלה 6, ננסה לפעול על השורה שמכילה a אחרונה, ולכן נקבל:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3 \leftrightarrow S_4]{S_1 \leftrightarrow S_2, S_2 \leftrightarrow S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1 - S_3 \to S_1]{S_2 - 2S_3 \to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 - 2S_2 \to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מתוך שלש השורות העליונות והנתון X=2 נפתר את שאר המשתנים ונקבל w=-0.5,y=-1.5z=1 ואת זה נציב במשואה הרביעית ונקבל 2a-3/2=1 ולכן a=1.25.

<u>חלק ב'.</u>

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל 3 נקודות.**

----

10. לכל מערכת ליניארית לא-הומוגנית של n משוואות ב-$n+1$ נעלמים יש אין סוף פתרונות.

כן	לא

11. אם המטריצה A מסדר 2x2 איננה אלכסונית אז הדטרמיננט שלה שונה ממכפלת אברי האלכסון.

כן	לא

12. הפונקציה $y=\frac{x(|x|-1)}{x^2+1}$ היא פונקציה זוגית.

כן	לא

13. אם מטריצה A הפיכה מסדר n, אז גם (I_n-A) הפיכה.

כן	לא

14. הפונקציה $y=\frac{x^2-1}{2}$ היא חד-חד-ערכית

כן	לא

15. הפונקציה $y=\frac{x^2}{e}$ היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

16. אם A,B, שתי מטריצות המקיימות $A+B=AB^T$, אז A,B בהכרח מטריצות ריבועיות.

כן	לא

17. אם במערכת משוואות הומוגנית מספר המשוואות קטן ממש ממספר הנעלמים, אז למערכת יש פתרון לא טריביאלי.

כן	לא

18. לכל מטריצה A מסדר 2×2 מתקיים $\det(A+A)=2\det(A)$.

כן	לא

19. אם למערכת משוואות $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 1 \\ cx_1 + dx_2 = -1 \end{cases}$ יש פתרון יחיד אז בהכרח $ad = bc$.

כן	לא

חלק ב- תשובות: 10-לא- לא בהכרח יש בכלל פתרון. 11-כן, כיון שעל האברים לא על האלכסון חיב להיות 0. 12-לא, היא אי זוגית. 13.- לא A=I היא דוגמא נגדית.
14-לא- תמיד x^2 איננו חח"ע. 15-כן היא מנה של שני פולינומים. 16-כן, בגלל ש- A+B מוגדרת אז יש ל-A ול-B אותם ממדים. mxn. מטריצת המכפלה יוצאת מממד mxm ולכן נובע n=m. 17. כן, תמיד יש פתרון ולפי הנתון יש לפתרון פרמטרים.
18. לא המטריצה A=I מקימת det(2I)=4,2det(A)=2. 19-לא כי ad=bc שקול לכך ש הדטרמיננט של המטריצה הוא 0.

בהצלחה !