

בס"ד יום א יב סיון התשס"ה 19-6-2005

מבחן אלגברה לינארית למנהל עסקים- מורה: גיורא דולה. סמסטר ב.

מועד א. המבחן ללא חמר עזר למעט מחשבוני לא מדעיים. המבחן נמשך שעתיים וחצי. נא לענות את התשובות על טופס השאלון על ידי תשובה סופית קצרה. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תאסף. בהצלחה.

במבחן 16 שאלות שוות משקל של 6 נקודות כל-אחת, סהכ 96 נקודות. כמעט בכל שאלה יש שאלה חלקית נוספת אשר פתרונה מזכה בנקוד חלקי.

1. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 15 \\ 3x + 7y + 12z = 56 \\ 6x + 14y + z = 43 \end{cases}$$

רשום את הפתרון הכללי של המערכת. אם אין פתרון כתוב אין פתרון.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת גאוס, כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה 3×6 בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה על ידי דטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים שקבלת פעם ממחיקת העמודה והשורה של 6 ופעם של 7. תשובה:

תשובה לשאלה 1

נפתור את המערכת לפי גאוס

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 15 \\ 3 & 7 & 12 & 56 \\ 6 & 14 & 1 & 43 \end{pmatrix}$$

נאפס מתחת ל-1 ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -17 & -47 \end{pmatrix}$$

נשתמש בשורה השניה כדי לאפס את 2, ונקבל

$$x=2, y=2, z=3 \text{ ולכן נקבל כי } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -23 & -69 \end{pmatrix}$$

בקשר לנקוד החלקי, יש לכתוב את המטריצה בעלת שני האפסים. מי שפתר את המערכת לפי שיטת קרמר, הדטרמיננט של המטריצה הוא -23. מי שחשב את המטריצה ההפוכה, קבל בשלב ראשון את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -17 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננט המתקבל ממחיקת 6 הוא 3, וזה המתקבל ממחיקת 7 הוא -17.

2. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 3x + 6y + 3z = 12 \\ 6x + 15y + 15z = 36 \end{cases}$$

רשום את הפתרון הכללי של המערכת. אם אין פתרון כתוב אין פתרון.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת גאוס, כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה 3×6 בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה על ידי דטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים שקבלת ממחיקת העמודה והשורה של שני האיברים השווים ל-6. תשובה:

תשובה לשאלה 2

נפתור את המערכת לפי גאוס

$$\text{נאפס מתחת ל-1 ונקבל:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \\ 6 & 15 & 15 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\text{נשתמש בשורה השניה כדי לאפס את} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \end{pmatrix}$$

השלישית ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ולכן $x=5z-4, y=4-3z$. בקשר לנקוד החלקי, מי שפתר את המערכת לפי גאוס רושם את המטריצה בעלת שני האפסים. מי שפתר את המערכת לפי שיטת קרמר, הדטרמיננט של המטריצה המקורית הוא 0. מי שחשב את המטריצה ההפוכה, קבל בשלב ראשון את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מי שחשב את ההפוכה על ידי דטרמיננטים, הדטרמיננט המתקבל ממחיקת 6 הוא -15 וזה המתקבל ממחיקת 6 הוא -9.

3. הבט במערכת הבאה ופתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 3x + 6y + 3z = 12 \\ 6x + 15y + 15z = 34 \end{cases}$$

רשום את הפתרון הכללי של המערכת. אם אין פתרון כתוב אין פתרון.

שאלה עבור ניקוד חלקי:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת גאוס, כתוב את המטריצה בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה 3×6 בשלב שבו אפסת שני מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x. תשובה:

אם פתרת את המערכת על ידי מטריצה הפוכה, ומצאת את המטריצה ההפוכה על ידי דטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים שקבלת ממחיקת העמודה והשורה של שני האיברים השווים ל-6. תשובה:

תשובה לשאלה 3

נפתור את המערכת לפי גאוס

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \\ 6 & 15 & 15 & 34 \end{pmatrix}$$

נאפס מתחת ל-1 ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & -3 & -9 & -14 \end{pmatrix}$$

נשתמש בשורה השניה כדי לאפס את השלישית ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ולכן למערכת אין פתרון.

בקשר לנקוד החלקי, מי שפתר את המערכת לפי גאוס רושם את המטריצה בעלת שני האפסים. מי שפתר את המערכת לפי שיטת קרמר, הדטרמיננט של המטריצה המקורית הוא 0. מי שחשב את המטריצה ההפוכה, קבל בשלב ראשון את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מי שחשב את ההפוכה על ידי דטרמיננטים, הדטרמיננט המתקבל ממחיקת 6 הוא -9 וזה המתקבל ממחיקת 6 הוא -15.

4. חשב את הדטרמיננט של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

תשובה: לאחר אפוס העמודה הראשונה המטריצה הופכת ל-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ולכן } \det = -15 + 20 = 5.$$

5. חשב את ההפוכה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 28 & 39 \end{pmatrix}$$

שאלה עבור קרדיט חלקי:

א. באם עבדת על ידי שיטת גאוס על מטריצה 3×6 , כתוב את המטריצה 3×6 שקבלת לאחר שאפסת את שני האיברים מתחת ל-1 בטור הראשון.

ב. באם עבדת בדרך של הדטרמיננטים, כתוב את שני הדטרמיננטים המתקבלים על ידי מחיקת השורה והעמודה של שני האיברים 7 ו-6.

תשובה: במצב שבו אפסנו את הטור מתחת ל-1 המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \text{ זוהי גם התשובה עבור נקוד חלקי.}$$

כעת נוסיף לשורה השניה את 4 פעמים השלישית, ונשתמש ב-1 כדי לאפס כלפי מטה. נקבל במצב משלשי את:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -23 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 64 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 1 & 2 \\ -87 & 4 & 15 \\ 64 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

נמשיך לעבד ונקבל את ההפוכה

תשובה זו אפשר לבדוק גם על-ידי דרך הדטרמיננטים. הדטרמיננט המתקבל ממחיקת ה-7 הוא 64 וזה המתקבל ממחיקת ה-6 התחתון הוא 3.

עד כאן

6. נתונה קבוצת הוקטורים הבאים.

$u=(1,2,3,4), v=(1,-1,1,-1), w=(4,-1,6,1)$
מצא בסיס לתת המרחב שהם פורשים.

תשובה:

7. המשך לשאלה 6. האם v, w הם בסיס לתת המרחב הנפרש?

תשובה:

תשובה ל-6 ול-7: נציב את u, v, w כעמודות מטריצה ונפעל פעולות. כשהיא

משולשית המטריצה יוצאת $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ הזוג u, v והזוג u, w הם בסיסים.

(מסתבר כי המטריצה עבור v, w, u היא $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן v, w גם הם בסיס.)

8. נתונה המערכת הבאה. מצא בסיס למרחב הפתרון שלה:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 0 \\ x + 3y + z - w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 4w = 0 \end{cases}$$

תשובה:

עבור נקוד חלקי, כתוב את המטריצה אחרי השלב שבו אפסת את העמודה מתחת ל-1.

תשובה:

תשובה: לאחר אפוס כלפי מטה בעמודה הראשונה, המטריצה הופכת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וזוהי התשובה לנקוד חלקי. לאחר אפוס כלפי מעלה מקבלים את:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $x=w-z$, $y=0$ ולכן,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w-z \\ 0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ובכך קבלנו בסיס למרחב הפתרונות.

9. נתונה המערכת הבאה התלויה בפרמטר b : פתור אותה במחברתך:

$$\begin{cases} x + 2y + (b+1)z = 7b \\ 3x + 2y + (b-1)z = 3b + 4 \\ 4x + 2by + 4z = 10b + 4 \end{cases}$$

מצא את ערכי b עבורם למערכת: אין פתרון, יש אינסוף פתרונות, יש פתרון יחיד.

עבור נקוד חלקי: אם עבדת בשיטת גאוס, מצא את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננט, מצא את הדטרמיננט של המערכת.

תשובה:

נקבל את שלש המטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b+1 & 7b \\ 3 & 2 & b-1 & 3b+4 \\ 4 & 2b & 4 & 10b+4 \end{pmatrix}$$

זוהי התשובה האחת עבור הנקוד

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b+1 & 7b \\ 0 & -4 & -2b-4 & 4-18b \\ 0 & 2b-8 & -4b & 4-18b \end{pmatrix}$$

החלקי. נחלק את השורה השניה ב-2 ואת השורה השנייה החדשה נכפל ב (b-4) ואת זה נחסר מן השורה השלישית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b+1 & 7b \\ 0 & 2 & b+2 & 9b-2 \\ 0 & 0 & (b+4)(2-b) & (9b-2)(2-b) \end{pmatrix}$$

דטרמיננט המערכת המקורית שווה לדטרמיננט של המטריצה האחרונה והוא (b+4)(2-b) וזוהי התשובה החלקית השנייה.

כאשר b=-4, אין למערכת פתרון. כאשר b=2 למערכת אינסוף פתרונות. עבור b=2 המערכת הופכת:

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{נאפס כלפי מעלה ונקבל} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

10. וזוהי התשובה ל-שאלה 10.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 \\ 8-z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. עבור אותו b שלמערכת יש אינסוף פתרונות, מצא את הפתרונות.

11. במכללה יש 3 פקולטות: מנע"ס, מחשבים ומשפטים. ידוע כי תלמיד מנע"ס צריך 4 שעות הרצאה בשבוע, שעה תרגול בשבוע ושבע שעות עבודה מנהלית בשבוע. ידוע כי תלמיד מחשבים צורך בשבוע 5 שעות הרצאה, שעה תרגול ו 8 שעות של עבודה מנהלית, וכי תלמיד משפטים צורך בשבוע 6 שעות הרצאה, שעה תרגול ו 8 שעות של עבודה מנהלית. ידוע כי המכללה הצליחה לשכר 3100 שעות הרצאה, 600 שעות תרגול ו-4700 שעות עבודה מנהלית בשבוע. מצא כמה תלמידים מכל חוג אפשר לרשום למכללה:

תשובה:

תשובה: ההפוכה היא המטריצה: $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ -1 & -10 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, כפי שאפשר בקלות

לבדוק. נכפל בוקטור $\begin{pmatrix} 3100 \\ 600 \\ 4700 \end{pmatrix}$ ונקבל את הפתרון $\begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$.

12. ישנו משק בעל שלש תעשיות תעשייה א, תעשייה ב ותעשייה ג. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשייה א, מחייב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 10 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 20 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשייה ב, מחייב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב בערך של 10 אגורות ושל תעשייה ג בערך של 20 אגורות, וכי יצור מוצרים של

תעשייה ג בשווי של שקל, מחיב רכישת מוצרים של תעשייה א בערך של 10 אגורות, של תעשייה ב של 10 אגורות ושל תעשייה ג של 20 אגורות. יש השוק החפשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני שח: 40 מיליונים של תעשייה א, 140 מיליונים תעשייה ב, 180 מיליונים –ג. יש למצא את כמות היצור השנתית של כל תעשייה במליוני שקלים:

נסח את המערכת. אין צורך לפתור.

13. פתור את המערכת שבתרגיל הקודם.

תשובה: מטריצת לאונטיף (במליוני שקלים) היא:

$$\text{נחליף שורות 1-2 נאפס כלפי} \cdot \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.1 & 40 \\ -0.1 & 0.9 & -0.1 & 140 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 & 180 \end{pmatrix}$$

$$\text{מטה ונקבל מטריצה משולשית:} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \text{ נמשיך לאפס}$$

ונקבל $x=100, y=200, z=300$ במליוני שקלים.

שאלה 14

חקלאי מגדל חיטים ושעורים. גדול כל טון חטה דורש 1 דונם אדמה ו-1 מ"ק מים. גדול כל טון שעורה דורש 4 דונם אדמה ו-2 מ"ק מים. לחקלאי 40 דונם אדמה ו-28 מ"ק מים. עבור כל טון חטה החקלאי מקבל 5000 שח, ועבור טונה שעורה הוא מקבל 6000 שח. כמה טונות חטה ושעורה יגדל כדי לקבל רווח מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

תשובה: נסמן ב-x את כמות הטונות של חטה שיגדל וב-y את כמות השעורה. המגבלה אודות האדמה היא $x+4y \leq 40$. המגבלה אודות המים היא $x+2y \leq 28$. פונקציית הרוח באלפי שקלים היא $5x+6y$.

המשך גיאומטרי. הישר $x+4y=40$ חותך את הצירים ב-(40,0) וב-(0,10). הישר $x+2y=28$ חותך את הצירים בנקודות (28,0) ו-(0,14). סה"כ נקבל שני קדקדים: (0,10) ו-(28,0). נקודת החתוך לשני הישרים היא (6,4). לכן יש לנו ארבעה קדקדים: (0,0), (6,4), (28,0), (0,10) ונציב אותם ב- $5x+6y$ ונקבל כי המקסימום הוא ב-(28,0) כלומר עליו לגדל 28 טונות חטה ו-0 טונות שעורה, ואז ירויח 140 אלפי שקלים.

המשך אלגברי. נסמן ב-z את כמות האדמה וב-w את כמות המים שהחקלאי לא משתמש בהם ונעבר למטריצה:

$$\text{נבחר את } -6 \text{ בשורת פונקציית המטרה.} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 40 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 28 \\ -5 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נחלק $28/2=14, 40/4=10$. הללו מתאימים לשני הקדקדים (0,14), (0,10) ורק המינימלי ביניהם הוא בתחום. לכן הפיבוט החדש הוא 4 ונחלק בו את השורה הראשונה ונאפס ונקבל:

$$\text{כעת נביט על } -3.5 \text{.} \left(\begin{array}{cccc|c} 0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 8 \\ -3.5 & 0 & 1.5 & 0 & 60 \end{array} \right)$$

$8/0.5=16, 10/0.25=40$ ולכן 0.5 הוא הפיבוט החדש. נשתמש בו ונקבל:

$$\text{נשים לב שוב כי יש איברים} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 & -0.5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 116 \end{pmatrix}$$

שליליים, ומעל -2 המנה החיובית היחידה היא $16/0.5=12$ ולכן שם יהיה הפיבוט ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 28 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 140 \end{pmatrix}$$

. בקדקד זה, $x=28, y=0$ והרוח הוא 140 אלפי שקלים.

שאלה 15

מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים הצמודים להם של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

תשובה: $\det=(x-3)(x-4)-2=x^2-7x+12-2=x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$. לכן העע הם 2,5. נציב את העע ונקבל את הוע. עבור 2 המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ווע הוא } (2,-1) \text{ ועבור 5 המטריצה היא } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ווע הוא } (1,1)$$

שאלה 16

מצא את נקודות הקיצון המקומיות של $f=x^2y^2-4x^2-2xy^2+8x$.

תשובה

$$f'_x=2xy^2-8x-2y^2+8=2(xy^2-4x-y^2+4)=2[x(y^2-4)-(y^2-4)]=2(x-1)(y^2-4)=2(x-1)(y-2)(y+2)$$

$f'_y=2yx^2-4xy=2yx(x-2)$. לכן הנקודות אשר מקימות את המערכת $f'_x=f'_y=0$ הן: $(1,0), (0,2), (2,2), (0,-2), (2,-2)$. נחשב את מטריצת ההסיאן:

$$H = \begin{pmatrix} 2y^2 - 8 & 4xy - 4y \\ 4xy - 4y & 2x^2 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y-2)(y+2) & 4y(x-1) \\ 4y(x-1) & 2x(x-2) \end{pmatrix}$$

בכל האיברים בהם $y=2, y=-2$ האיבר העליון משמאל מתאפס ולכן אין שם קיצון. לכן צריך להציב רק את $(1,0)$ ושם מקבלים את ההסיאן:

$$H = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ולכן דרך המינורים מקבלים שהדטרמיננטים הם $-8, 16$. על ידי ערכים עצמיים מקבלים כי הם $-8, -2$ ולכן בשני האפנים זוהי נקודת מקסימום יחידה.